ADVANCED PHYSICS LIBRARY

古典および量子重力理論

木村利栄／太田忠之著

マグロウヒル

はじめに

一般相対性理論に基づく重力理論に関する書物は国内・国外で多数出版されており，名著と呼ばれるものも少なくない．本書はEinsteinの重力理論の古典的取扱いと，量子論的取扱いとの接点を探ることに重点をおいてまとめたものである．

現在の物理学の基礎となっているのは量子力学と相対性理論である．量子力学はSchrödinger，Heisenberg，Diracをはじめとする多くの若い英才によって開拓され，Einsteinの特殊相対性理論とも結びつき場の量子論となり，重力を除いた素粒子の統一理論にまで発展した．一方，重力を記述する一般相対性理論は1907年から1916年にかけてEinstein一人の天才によって完成された．一般相対性理論がみごとなまでに美しい理論体系を有していたにもかかわらず，素粒子論の華々しい成果に比べて，戦後しばらくまで，一部の人を除いて余り注目されず大きな発展はなかった．この原因の1つは量子論と一般相対性理論との基本概念に相容れないものがあったためであろう．

1965年3K輻射の発見によって，一般相対性理論の有効性が見直され，一般相対性理論も一躍，表舞台へ上ってきた．その後，数学的な面での大きな発展もあったが，一般相対性理論と量子論との融合の問題は解決されなかった．これは，一般相対性理論の量子化には次のような困難が内在しているためと思われる．量子論では状態を定義するには，1つの時間が全平坦時空で設定されている必要があったが，一般相対性理論では時間は全時空にわたって大局的には定義されず局所的にしか導入できないので，量子論との結び付きが困難である．局所的に限って，Minkowski空間を背景場として展開した非線形的な取扱いでも，量子電気力学のようにくりこみ可能とはならず，無限大の発散も含んだままで未解決なものとして残っている．また，量子論との融合の困難の遠因は古典論の段階で，Einsteinの重力方程式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}$$

にすでに現われている．Einsteinは著書「晩年に思う」において，この式の左辺は

純粋に幾何学的な量で大理石のようだが，右辺の物質を表わす $T_{\mu\nu}$ は，安物の木材のようだと述べている．$T_{\mu\nu}$ としての従来の素粒子場をとれば，その感は一層深い．

本書においては $T_{\mu\nu}$ として，素粒子と結び付きが容易な古典的な点粒子系をとって古典重力から出発する．点粒子系に対する Einstein の重力方程式の一般的な厳密解は未だ見つかっていない．したがって，Newton 近似よりも $(1/c^2)^2$ 倍次数の高い近似(ポスト・ポスト・Newton 近似)を行う方法を展開し，この近似での点粒子系の多体重力ポテンシャルを得る方法を確立するのが，本書の 1 つの目的である．

得られたポテンシャルを用いて，この近似での連星の近星点移動，この近似で初めて現われる座標条件と観測予測値との関連の問題等についても詳しく述べる．

古典論から量子論へ移行する過程において有力な役割を果たす正準形式を，多体重力ポテンシャルを求める手段として利用するに止まらず，重力波と四重極公式の議論に用いる．関連して Wheeler-De Witt の量子重力にもふれる．

本書の次の目的は，スカラー場を物質場とした場合の Einstein の重力理論における作用関数を土台にし，量子力学における S 行列の方法によって，多体重力ポテンシャルを詳しい吟味のもとで求めることである．得られたポテンシャルと古典論での結果を比べることによって，古典論と量子論との対応が明らかにされる．S 行列から多体重力ポテンシャルを求める際の多くの技巧によって，古典論における多体重力ポテンシャルと S 行列からのポテンシャルの一致が示される．

量子論と古典論の対応に関して，古典論で成立していた等式が，重力相互作用に伴う量子論的効果(Feynman 図における Fermi 粒子のループ図による補正)によって破れるという量子異常項の問題がある．この量子異常項は，多次元時空における，重力を含む素粒子の統一理論を記述するゲージ理論の整合性の問題の解決に決定的な役割を果たす．本書では 4 次元 Riemann 時空における軸性電流保存の破れ，および 2 次元時空での量子重力異常（Lorentz 不変性や一般共変性の破れ）について基礎的な方法で論じる．

量子論にかかわる上記 2 つの主要な問題は，量子化に伴う重力場固有の無限大の発散を巧みに避けて論じられる部分である．初めに述べたように，この発散の困難は未解決であり，これをさけうる可能性があるといわれる超弦理論と呼ばれる試みが唯一のものとして候補に上っている．この理論は膨大で，数学的にも複雑なので詳細は別の書にゆずらざるをえないし，また本書の直接の目的でもないので，超弦

理論については解説書の解説といった形にとどめた．しかし，超弦理論が，重力子をいかなる形で含んでいるか，および無限大の困難や量子異常項の除去に果たす役割については平易な形でその概観を与えたつもりである．

本書は，われわれがこれまで行ってきた仕事を中心にしてまとめたものである．その主要部分の1つである多体の重力ポテンシャルの研究は，立教大学の緋田吉良教授，工学院大学の岡村浩教授と共同で行われたものである．この書を書く動機を与えて下さった両教授に厚く感謝します．2次元量子重力異常の部分については山形大学理学部の遠藤龍介博士の未発表の原稿を参照させていただいた．同博士にここでお礼を述べたい．最後に，原稿についての色々な御注意，御理解を与えて下さったマグロウヒル出版の藤村行俊氏に感謝いたします．

1989年2月

著者しるす

記 号 一 覧 表

1） ギリシャ字の添字　λ，μ，ν，… 等：すべて0，1，2，3を表わす.

2） ラテン小文字の添字　i，j，k，… 等：1，2，3を表わす.

3） ラテン小文字の添字　a，b，c，d：物体を識別する添字を表わす.

4） $x^\mu = (x^0 = ct,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$：時空の座標，$z_a{}^\mu$ は物体の座標を表わす.

5） $\eta_{\mu\nu}$：Minkowski 時空の計量テンソル

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1, & \mu = \nu = 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \\ 1, & \mu = \nu = 1,\ 2,\ 3 \end{cases}$$

$g_{\mu\nu}$：4次元 Riemann 空間の計量テンソル

6） $g = \det(g_{\mu\nu})$

7） $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$：線素

8） $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$：Christoffel シンボル（affine 係数）

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho}\Gamma_{\rho\mu\nu},\quad \Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})\ ;\ g_{\rho\mu,\nu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} = \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu}$$

（コンマは微分を表わす）

9） ∇_μ：共変微分を表わす.

10） $R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu}$：Riemann 曲率テンソル

11） $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda} = R_{\nu\mu}$：Ricci テンソル

12） $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$：Ricci スカラー

13） $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$：Einstein テンソル

14） $T^{\mu\nu}$：物質系の対称エネルギー・運動量テンソル

多体系に対しては

$$T^{\mu\nu} = -\sum_a \frac{m_a}{\sqrt{-g}}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}\frac{dt}{d\tau}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_a(t)),\quad d\tau = c^{-1}\sqrt{-g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}$$

（$\sqrt{-g}\,T^0{}_0 > 0$ がエネルギー密度を表わす.）

15)　$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$：Einstein の重力場方程式，$\left(\frac{8\pi G}{c^4}=k\right)$.

16)　$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau}=0$：質点の運動方程式，$(x^\mu=z_a{}^\mu)$.

17)　第 6 章および付録A－9 では上記の 4 次元の計量テンソル，Christoffel シンボル，Ricci テンソル，Ricci スカラーを ${}^4g_{\mu\nu}$，${}^4\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$，${}^4R_{\mu\nu}$，${}^4R$ と表示し，3 次元空間の対応する量を g_{ij}，$\Gamma^i{}_{jk}$，R_{ij}，R と表わす.

18)　$A_{(\mu\cdots}B_{\nu)\cdots}=\frac{1}{2}(A_{\mu\cdots}B_{\nu\cdots}+A_{\nu\cdots}B_{\mu\cdots})$

$A_{[\mu\cdots}B_{\nu]\cdots}=\frac{1}{2}(A_{\mu\cdots}B_{\nu\cdots}-A_{\nu\cdots}B_{\mu\cdots})$

19)　$\{A,B\}=\frac{\partial A}{\partial q^i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q^i}$：Poisson 括弧

$\{A,B\}^*=\{A,B\}-\{A,\theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t,B\}$：Dirac 括弧

$(C^{-1})^{rs}$ は第 2 類拘束条件式 θ_s ($s=1$，…… S) から $(C^{-1})^{rs}\{\theta_s,\theta_t\}=\delta^r{}_t$ により定められる.

20)　γ^μ；$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\eta^{\mu\nu}$：Dirac 行列（Minkowski 空間）

$\gamma_k=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma_k\\ i\sigma_k & 0\end{pmatrix}$，$\gamma_0=\begin{pmatrix}0 & iI\\ iI & 0\end{pmatrix}$；

$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$，$\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

21)　$h_\alpha{}^\mu$：4 脚場，α は局所 Lorentz 系の添字，μ は Riemann 空間の添字

22)　$\omega_{\alpha\beta,\mu}$：スピン接続場

目　次

第1章　特殊相対性理論

通常の相対論の教科書では，Michelson-Morley の実験から説き起こし，地球のエーテルに対する相対的な運動が観測にかからなかったという事実を基に，この実験とエーテル理論説との間の論争を解決する必要性から特殊相対性理論が構築されたという記述がなされている．しかし，Einstein が Michelson-Morley の実験を本当に基にして出発したかどうかは疑問である．Einstein は，この点について寡黙であった．死の一年前に書かれた手紙の中で，彼は次のように述べている．

「私自身の展開の中で，Michelson の結果は大した影響を持ちませんでした．この問題についての第1論文を書いたとき（1905年），一体，そのことを知っていたのかどうか，私は覚えてさえおりません．説明しますと，私は一般的理由から，絶対運動は存在しないと堅く確信しておりましたし，私の問題は，このことをどのようにして電気力学の我々の知識と一致させることができるか，ということだけでした．これで，なぜ私の個人的苦闘の中で Michelson の実験が何の役割も果たさなかったのか，あるいは少なくとも決定的な役割をはたさなかったのか，おわかりいただけると思います」

この興味ある問題への科学史的立場からの分析については Pais の著書［1］を参照されたい．Einstein にとって相対性理論への道を拓くことになった大きな動機は Michelson-Morley の実験というよりも，彼の中に若い頃から芽ばえていた純粋に論理的思考による自然法則への探求だったと思われる．

§1-1　特殊相対性理論の仮設

Einstein のおいた仮設は

（I）ひとつの座標系 K を基準にしたとき物理法則がもっとも簡単な形に選ばれたとする．K に対して一様な速度で動いている他の任意の座標系 K' を基準にしても K におけると同じ法則が成り立つ．これを**特殊相対性原理**という（特殊としたのは一様な速度で運動している系に対してのみ成り立つ

という意味である).

(II) 光の速度は光源の運動とは無関係である.

この2つの仮設から特殊相対性理論が構成された. 古典力学とまったく趣きを異にしているのが(II)の仮設である. Einstein は Newton 力学よりも, 光速度を含めたところで成り立っている電磁気学の理論を土台にすべきと考えたのである. 特殊相対性原理と光速度不変の要請が一緒になり, Lorentz 変換とか, 同時性の相対性が導かれたのである.

光速度 c が一定ということは, K, K' 系で光の波面が

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2 = 0 \tag{1-1}$$

で表わされることを意味する. ここで

$$x^0 = ct\ ;\ x^1 = x\ ;\ x^2 = y\ ;\ x^3 = z \tag{1-2}$$

とおくと (1-1) は*)

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0\ ;\ \eta_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = 0 \tag{1-3}$$

のようになる. ただし

$$-\eta_{00} = \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1\ ;\ \eta_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu). \tag{1-4}$$

x^μ をベクトルとみなすと, $\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ は4次元空間での長さの2乗である. さらに座標の微分差 dx^μ から作られる4次元空間での微小距離(線素)の2乗は

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1-5}$$

で与えられる. 特殊相対性理論における K, K' 座標系の間の変換は(1-3), あるいは, (1-5)を不変にするもので, **Lorentz 変換**と呼ばれる. 2点間の微小距離が(1-5)で与えられる空間が **Minkowski 空間**である. 特殊相対性理論においては, 時間と空間は独立ではなく, 物理法則を考えるときには, 4次元時空 (時間が1次元, 空間が3次元) で扱わねばならない. 座標変換を4行4列の行列 $\Lambda^\mu{}_\nu$ を用いて

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\ ;\ \text{または}\ dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu \tag{1-6}$$

とすると, (1-3), (1-5)を不変にするためには, 次式が満たされねばならない.

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\lambda\Lambda^\nu{}_\rho = \eta_{\lambda\rho}. \tag{1-7}$$

これを満たす変換係数を持つ座標変換が**広い意味の Lorentz 変換**である. この中

---

*) 以下, 上ツキと下ツキの添字に同じものが現われるときは, その添字について和をとるものとする (Einstein の規則ともいう).

には3次元空間での回転も含まれている.

一般のLorentz変換は(1-7)の両辺の行列式をとることによって得られる $\det\Lambda = 1$; $\det\Lambda = -1$*), および(1-7)の0-0成分

$$-(\Lambda^0{}_0)^2+(\Lambda^1{}_0)^2+(\Lambda^2{}_0)^2+(\Lambda^3{}_0)^2 = -1$$

から導かれる $\Lambda^0{}_0 \geq 1$; $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ によって, 4個の連結成分に分けられる.

通常書かれている特殊Lorentz変換は, x' 座標系が x 系に対して一定速度 v で $x^1(=x)$ 軸の正の方向に進んでいるときの座標系の間の変換で

$$\begin{aligned} &x'^0 = x^0\cosh\psi + x^1\sinh\psi\ ;\ x'^1 = x^1\cosh\psi + x^0\sinh\psi\ ; \\ &x'^2 = x^2\ ;\ x'^3 = x^3 \end{aligned} \tag{1-8}$$

で与えられる**). ただし $\tanh\psi = -v/c$ である.

§1-2　相対論的点粒子

後に言及する弦模型とも関係するので, 相対論的点粒子の力学について述べる. 特殊相対性理論における点粒子の運動方程式は, 点粒子の描く4次元時空の中での軌跡（**世界線**という）の長さを極値にするという条件式から導かれる. すなわち, 次の作用関数

$$I = -mc^2\int_1^2 d\tau = -mc\int_1^2(-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \tag{1-9}$$

の変分をとって得られる(ただし m は点粒子の質量である). ここで点粒子の世界線上での位置を示すパラメータとして τ をとった. このパラメータのとり方はまったく任意であることを注意しておく. 4次元速度として

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \tag{1-10}$$

をとると (1-9) は次のようになる.

$$I = \int L d\tau = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu)^{1/2}d\tau. \tag{1-11}$$

$x^\mu(\tau)$ に正準共役な運動量は, Lagrange関数 L から次式で定義される　、

---

*)　det は行列式の記号.

**)　エネルギー E と運動量の x^1 成分 p^1 との間にも, これと同じ変換式が成立する.

$$p_\mu(\tau)=\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu(\tau)/d\tau)}=\frac{mcu_\mu(\tau)}{(-u^2)^{1/2}}=\frac{mc}{(-u^2)^{1/2}}\frac{dx_\mu(\tau)}{d\tau}. \tag{1-12}$$

ここで，$dx_\mu(\tau)/d\tau=\eta_{\mu\nu}dx^\nu(\tau)/d\tau$，$u^2=u_\mu{}^2=u_\mu u^\mu=\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$ である．(1-11)の L は 4 次元速度 u^μ について 1 次の同次式なので，$u^\nu\partial L/\partial u^\nu=L$ である．この式を u^μ について微分すると

$$u^\nu\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu\partial u^\nu}=0 \tag{1-13}$$

となる．すべては 0 でない u^ν について(1-13)が成り立つためには，**Hessian 行列**と呼ばれる行列の行列式が

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^\mu\partial u^\nu}\right)=0 \tag{1-14}$$

でなければならない．すると(1-12)から u^μ を解いて正準座標 x^μ，p_ν により u^μ を表わすことはできなくて，x^μ，p_ν の間に u^λ を含まぬ関係式が生ずる．このような力学系は**拘束系**と呼ばれている*)．このことが起る原因はパラメータ τ の任意性にある．(1-12)より拘束条件式として

$$\phi_1=p_\mu{}^2+m^2c^2\approx 0 \tag{1-15}$$

を得る．ここで ≈ は**弱い等式**と呼ばれ拘束条件のもとで成立することを意味する．正準 Hamilton 関数は

$$H=p_\mu\dot{x}^\mu-L=0 \tag{1-16}$$

となる．拘束系の力学系の手法に従って，全 Hamilton 関数として次のものをとる．

$$H_T=H+v(\tau)(p^2+m^2c^2)=v(\tau)(p^2+m^2c^2), \tag{1-17}$$

ただし，$v(\tau)$ は任意関数である．

ここで **Poisson 括弧**を次式で導入する

$$\{x^\mu(\tau),\ p_\nu(\tau)\}=\delta^\mu{}_\nu\,;\ \{x^\mu(\tau),\ x^\nu(\tau)\}=\{p_\mu(\tau),\ p_\nu(\tau)\}=0. \tag{1-18}$$

Hamilton 運動方程式（正準方程式）は

$$\begin{aligned}\frac{dx^\mu}{d\tau}&=\{x^\mu,\ H_T\}=2vp^\mu\\ \frac{dp_\nu}{d\tau}&=\{p_\nu,\ H_T\}=-\frac{\partial v}{\partial x^\nu}(p^2+m^2c^2)\approx 0\end{aligned} \tag{1-19}$$

---

*) 拘束系の力学についてのくわしい議論は文献［2］を参照されたい．

である．第1式から $v(\tau)=(-u^2)^{1/2}/2mc$ と書かれるが，u 自身，τ が任意なので任意となり，したがって v も定まらない．

第1類拘束条件式*)は量子化にさいしては，量子力学的状態ベクトル Ψ に対する付加条件式の形で

$$(p_\mu p^\mu + m^2c^2)\Psi = 0 \tag{1-20}$$

とおかれる．Poisson 括弧と交換関係 [,] の間の対応関係は

$$i\hbar\{x^\mu(\tau),\ p_\nu(\tau)\} \Longleftrightarrow [x^\mu(\tau),\ p_\nu(\tau)] \tag{1-21}$$

である．交換関係 $[x^\mu(\tau),\ p_\nu(\tau)]=i\hbar\delta^\mu{}_\nu$ を満たす p_ν は，$x^\mu(\tau)$ を対角成分とする表示をとると，$p_\nu=-i\hbar\partial/\partial x^\nu$ と表わされる．結局 (1-19) は

$$\left(\eta^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{1-22}$$

であり，Schrödinger 方程式の相対論的拡張である Klein-Gordon 方程式となる．

以上ではパラメータ τ（これはゲージと考えられる）を任意としたが，ここでゲージを固定してみよう．ゲージ固定として

$$\theta = x^0(\tau)-c\tau \approx 0 \tag{1-23}$$

とおき，θ と ϕ_1 の Poisson 括弧が $\{\theta,\phi_1\}=2p^0 \neq 0$ となるようにする．θ と ϕ_1 との Poisson 括弧は 0 でないので，条件式(1-15)と(1-23)は整合的でない．このような条件式が強い意味で 0 とおけるためには，力学変数と，θ,ϕ_1 との Poisson 括弧が 0 になるようにしなければならない．このために任意の 2 つの力学量，A，B に対する Poisson 括弧の代りに次の **Dirac 括弧**と呼ばれるものをとる [2]**)．

$$\{A,B\}^* = \{A,B\}+\{A,x^0-c\tau\}\frac{1}{2p^0}\{p^2+m^2c^2,B\}$$

$$-\{A,p^2+m^2c^2\}\frac{1}{2p^0}\{x^0-c\tau,B\}. \tag{1-24}$$

---

*) 正準 Hamilton 関数およびすべての拘束条件式との Poisson 括弧が ≈ 0 である拘束条件式を第1類拘束条件式，そうでないものを第2類拘束条件式という．

**) 第2類拘束条件式を $\theta_s(s=1,\cdots,S)$ とする．$\det(\{\theta_s,\theta_t\})\neq 0$ なので $(C^{-1})^{rs}\{\theta_s,\theta_t\}=\delta^r{}_t$ を満たす C^{-1} が存在する．$(C^{-1})^{st}$ を用いて Dirac 括弧は

$$\{A,B\}^* = \{A,B\}-\{A,\theta_s\}(C^{-1})^{st}\{\theta_t,B\}$$

で定義される．

この Dirac 括弧を用いると

$$\{x^\mu(\tau), p_\nu(\tau)\}^* = \delta^\mu{}_\nu - \delta^0{}_\nu \frac{p^\mu}{p^0};$$

$$\{x^\mu(\tau), x^\nu(\tau)\}^* = \{p_\mu(\tau), p_\nu(\tau)\}^* = 0 \tag{1-25}$$

となり，$x^\mu(\tau)$，$p_\nu(\tau)$ と θ，ϕ_1 との Dirac 括弧は 0 となり，$p_\mu p^\mu + m^2c^2 = 0$ は強い意味で 0 となる．$\{x^0(\tau), p_0(\tau)\}^* = 0$ なので，$p_\mu p^\mu + m^2c^2 = 0$ を解いて求まる

$$\mathfrak{H} = p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2c^2} \tag{1-26}$$

を Hamilton 関数とすべきである．運動方程式として次式を得る．

$$c\frac{dx^i}{dx^0} = \{x^i(x^0), \mathfrak{H}\}^* = p^i/p^0 ; \ c\frac{dp_i}{dx^0} = 0. \tag{1-27}$$

終りに多粒子系の場合の作用関数 I を場の理論の形式に書いておこう．

$\int d^4x\delta^4(x - z_a) = 1$ を用い

$$I = \frac{1}{c}\int d^4x L_M(x), \tag{1-28}$$

ここで

$$L_M(x) = -\sum_a m_a c^2 \int\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dz_a{}^\mu}{ds_a}\frac{dz_a{}^\nu}{ds_a}}\delta^4(x - z_a(s_a))ds_a, \tag{1-28$'$}$$

ただし $ds_a = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dz_a{}^\mu dz_a{}^\nu}$ である．ds_a についての積分を行うと，$ds_a = (ds_a/dz_a{}^0)\cdot dz_a{}^0$ を考慮し

$$L_M(x) = -\sum_a m_a c^2 \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_a(x^0)) \tag{1-28$''$}$$

と書かれる．作用関数と Lagrange 関数とは(1-28)の関係で結ばれる．

§1-3　特殊相対性理論における物質場

1925年からの量子力学の発展に従って，粒子も特殊相対性理論の要求を満たす場によって表現されるようになった．場の変数 $\phi^A{}_\alpha(x)$ は時空点 x^μ の関数で，添字 A は異なった場を区別するもので，α はひとつの場の成分を表わす添字である．Lagrange 関数 L は $\phi^A{}_\alpha$ およびその微分 $\partial_\mu\phi^A{}_\alpha = \partial\phi^A{}_\alpha/\partial x^\mu$ の関数で，運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \phi^A{}_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi^A{}_\alpha)} = 0, \tag{1-29}$$

正準エネルギー・運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ は次式で与えられる*).

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi^A{}_\alpha)} \partial_\nu \phi^A{}_\alpha - \delta^\mu{}_\nu L. \tag{1-30}$$

この式に Lagrange 関数から導かれる運動方程式を用いると，連続の方程式 $\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0$ が満たされる．一般に，スピンが 0 でない場合には $T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\lambda} T^\lambda{}_\nu$ は μ，ν について対称ではないので対称テンソルにするために，次の**スピン・エネルギー運動量テンソル** $\theta^s{}_{\mu\nu}$ を加えなければならない．Lorentz 変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ の無限小変換が $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu$；$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$，のとき，場の変数 ϕ_α（添字 A は略す）の無限小変換は $\delta\phi_\alpha = 1/2(\mathscr{S}_{\mu\nu})^\beta{}_\alpha \phi_\beta$ で定義されているとする．$\theta^s{}_{\mu\nu}$ は

$$\theta^s{}_{\mu\nu} = \partial^\sigma f_{\mu,\nu\sigma} = \frac{1}{2}\partial^\sigma \left[-\frac{\partial L}{\partial(\partial^\sigma \phi_\alpha)} (\mathscr{S}_{\mu\nu})^{\alpha\beta} \phi_\beta - \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu \phi_\alpha)} (\mathscr{S}_{\sigma\mu})^{\alpha\beta} \phi_\beta + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} (\mathscr{S}_{\nu\sigma})^{\alpha\beta} \phi_\beta \right] \tag{1-31}$$

で与えられる [3]．以下，本書で用いる粒子場について概略のみ挙げておく．

質量 m，スピン 0 の Bose 統計に従うスカラー粒子の Lagrange 関数は

$$L = -\frac{1}{2} c^2 \{ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \varphi^2 \}, \tag{1-32}$$

運動方程式は

$$\left(\Box - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi = 0 \;;\; \Box = \triangle - \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}. \tag{1-33}$$

質量 0，スピン 1 の電磁場は 4 次元電磁ポテンシャルを A_μ とすると，Lagrange 関数，運動方程式はそれぞれ

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \;;\; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{1-34}$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{1-35}$$

量子化にさいしては，**付加条件（Lorentz 条件）** として次式が置かれる．

$$\partial^\mu A_\mu \approx 0. \tag{1-36}$$

以上は Bose 場であったが，Fermi 場の代表的なものとして，質量 m，スピン

*） 本書ではエネルギー・運動量テンソルの符号を $T^0{}_0 > 0$ となるように定める．

1/2の **Dirac 粒子**がより基本的なものとして存在する．Dirac 粒子は，4行1列のスピノール ψ で記述され，その運動方程式は

$$\left(\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+\frac{mc}{\hbar}\right)\psi=0 \tag{1-37}$$

で与えられる．ただし，γ^{μ} は Dirac 行列と呼ばれる4行4列の行列で，反交換関係

$$\{\gamma^{\mu},\ \gamma^{\nu}\}=\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2\eta^{\mu\nu} \tag{1-38}$$

を満たす．Lagrange 関数は次式で与えられる．

$$L=-\frac{\hbar c}{2}(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\partial_{\mu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)-mc^{2}\overline{\psi}\psi\ ;\ \overline{\psi}=i\psi^{+}\gamma^{0}. \tag{1-39}$$

ψ^{+} は ψ のエルミート共役を表わす．これから導かれる正準エネルギー・運動量テンソルは対称ではなく(1-31)で $(\mathscr{S}_{\mu\nu})^{\alpha\beta}=1/4\,(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu})^{\alpha\beta}$ としたスピン・エネルギーテンソル $\theta^{s}{}_{\mu\nu}$ を加えることによって対称となる．

1939年に至り，Pauli，Fierz 等によりスピンが3/2以上の特殊相対論的な場の方程式が得られるようになった．ここで1915年に Einstein が一般相対性理論を作らなかったという仮定をして，1939年頃の場の理論の知識で，重力をいかに取り扱うことができたか考えてみよう．

最初に Newton の重力法則が遠方まで成立していることから，重力を伝播する場の質量は0とするのが妥当であろう．次に粒子と反粒子間の重力も引力であるから，スピン1のベクトル場は除外され，力の伝播場としての Bose 場で残る候補はスピン0か2の場である．光が重力によって曲げられることを考慮すると，スピン0の中性スカラー場 ϕ を重力場とすることはできない．なぜなら，電磁場との相互作用で特殊相対性理論的に不変なものは，たとえば $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\phi$ が考えられるが，これでは光は曲げられないからである．よって残るのはスピンが2の場のみである．

質量0，スピンが2の場は対称テンソル $\gamma_{\mu\nu}=\gamma_{\nu\mu}$ で表わされ，電磁場における(1-36)のような付加条件

$$\partial^{\mu}\gamma_{\mu\nu}\approx 0 \tag{1-40}$$

が課せられている．

重力はすべての物質に対して，その2階の対称エネルギー・運動量テンソルと普遍的に相互作用すると考えるのが妥当であろう．したがって，物質場が無くても，

重力は重力場のつくる対称エネルギー・運動量テンソル $\Theta_{\mu\nu}$ とも相互作用すると考えるべきである．$\gamma_{\mu\nu}$ の満たす方程式は，χ を相互作用定数として，

$$\Box\gamma_{\mu\nu}=\chi\Theta_{\mu\nu} \tag{1-41}$$

であろう．左辺の $\Box\gamma_{\mu\nu}$ を導く Lagrange 関数は付加条件(1-40)を考慮すると，一般的なものとして，

$$L_0=-\frac{1}{2}\{\partial_\lambda\gamma^{\mu\nu}\partial^\lambda\gamma_{\mu\nu}+a\partial_\mu\gamma_{\lambda\nu}\partial^\nu\gamma^{\lambda\mu}+b\partial_\lambda\gamma^\mu{}_\mu\partial^\lambda\gamma^\nu{}_\nu\} \tag{1-42}$$

と書けよう．ここで a，b は未定係数である．(1-42)から導かれる $\delta L_0/\delta\gamma_{\mu\nu}=\partial L_0/\partial\gamma_{\mu\nu}-\partial_\lambda(\partial L_0/\partial(\partial_\lambda\gamma_{\mu\nu}))$ に，さらに上の L_0 から導かれる

$$S_{\mu\nu}=\Theta_{\mu\nu}+c\eta_{\mu\nu}\Theta^\lambda{}_\lambda,\quad (c\text{ は未定係数}) \tag{1-43}$$

が現れるよう，L_0 に新しく L_1 を加えよう．ここで $\Theta_{\mu\nu}$ は(1-42)の L_0 から導かれる正準エネルギー・運動量テンソルに，(1-31)の $(\mathscr{S}_{\mu\nu})_{\alpha\beta}$ として

$$(\mathscr{S}_{\mu\nu})_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}=2\eta_{[\mu\alpha_1}\eta_{\nu]\beta_1}\eta_{\alpha_2\beta_2}+2\eta_{[\mu\alpha_2}\eta_{\nu]\beta_2}\eta_{\alpha_1\beta_1}$$

としたスピン・エネルギー運動量テンソルを加えたものである*)．したがって $S_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu}=&-\partial_{(\mu}\gamma_{\lambda\rho}\partial_{\nu)}\gamma^{\lambda\rho}-b\partial_{(\mu}\gamma^\lambda{}_\lambda\partial_{\nu)}\gamma^\rho{}_\rho+(2-a)\partial_\lambda\gamma_{(\mu\rho}\partial_{\nu)}\gamma^{\rho\lambda}\\&+a\partial_\lambda\gamma_{\rho(\mu}\partial^\rho\gamma^\lambda{}_{\nu)}-2a\gamma^{\lambda\rho}\partial_\lambda\partial_\rho\gamma_{\mu\nu}+a\partial^\beta\gamma_{\rho(\mu}\partial^\rho\gamma_{\beta\nu)}\\&-(2+a)\partial_{(\mu}\partial_\rho\gamma_{\lambda\nu)}\gamma^{\lambda\rho}+\eta_{\mu\nu}[\{1+2c(1+a)\}\partial^\sigma\gamma^{\lambda\rho}\partial_\sigma\gamma_{\lambda\rho}\\&+\{a+4c(1+a)\}\partial^\lambda\gamma^{\rho\sigma}\partial_\rho\gamma_{\lambda\sigma}-b(1+2c)\partial_\lambda\gamma^\sigma{}_\sigma\partial^\lambda\gamma^\omega{}_\omega+2ac\gamma_{\lambda\rho}\partial^\lambda\partial^\rho\gamma^\omega{}_\omega]\end{aligned} \tag{1-44}$$

となる．$\delta L_1/\delta\gamma_{\mu\nu}$ が上の $S_{\mu\nu}$ に等しくなるような付加的 Lagrange 関数 L_1 の一般形は

---

*) ここで

$$A_{(\mu\cdots}B_{\nu)\cdots}=\frac{1}{2}(A_{\mu\cdots}B_{\nu\cdots}+A_{\nu\cdots}B_{\mu\cdots})\,;$$

$$A_{[\mu\cdots}B_{\nu]\cdots}=\frac{1}{2}(A_{\mu\cdots}B_{\nu\cdots}-A_{\nu\cdots}B_{\mu\cdots})$$

という記法を用いた．

$$L_1 = g_1\gamma^{\omega}{}_{\omega}\partial_\mu\gamma^{\lambda}{}_{\lambda}\partial^\mu\gamma^{\nu}{}_{\nu} + g_2\gamma^{\omega}{}_{\omega}\partial_\mu\gamma_{\nu\lambda}\partial^\mu\gamma^{\nu\lambda} + g_3\gamma^{\omega}{}_{\omega}\partial_\mu\gamma_{\nu\lambda}\partial^\nu\gamma^{\mu\lambda} + g_4\gamma_{\mu\nu}\partial^\mu\gamma^{\lambda}{}_{\lambda}\partial^\nu\gamma^{\omega}{}_{\omega}$$
$$+ g_5\gamma_{\mu\nu}\partial^\mu\gamma_{\lambda\rho}\partial^\nu\gamma^{\lambda\rho} + g_6\gamma_{\mu\nu}\partial^\mu\gamma_{\lambda\rho}\partial^\lambda\gamma^{\nu\rho} + g_7\gamma_{\mu\nu}\partial_\lambda\gamma^{\mu\rho}\partial^\lambda\gamma^{\nu}{}_{\rho} + g_8\gamma_{\mu\nu}\partial_\lambda\gamma^{\mu\rho}\partial_\rho\gamma^{\nu\lambda}$$
$$+ g_9\gamma_{\mu\nu}\partial^\mu\gamma^{\lambda\nu}\partial_\lambda\gamma^{\omega}{}_{\omega} + g_{10}\gamma_{\mu\nu}\partial^\lambda\gamma^{\mu\nu}\partial_\lambda\gamma^{\omega}{}_{\omega} \qquad (1\text{-}45)$$

と書かれる．

次の方程式

$$\frac{\delta L_1}{\delta\gamma_{\mu\nu}} = \varkappa S_{\mu\nu} \qquad (1\text{-}46)$$

の両辺を比べると

$$g_1 = g_2 = g_3 = g_6 = g_9 = 0 \;\;;\;\; 2g_4 = -g_5 = \frac{1}{2}g_7 = -\frac{1}{2}g_8 = -g_{10} = \varkappa/4$$

$$a = -2 \quad ; \quad b = c = -\frac{1}{2} \qquad (1\text{-}47)$$

と定まり，結局，求める Lagrange 関数として，

$$L = L_0 + L_1, \qquad (1\text{-}48)$$

ただし

$$L_0 = -\frac{1}{2}\left[\partial_\lambda\gamma^{\mu\nu}\partial^\lambda\gamma_{\mu\nu} - 2\partial^\lambda\gamma^{\rho\sigma}\partial_\rho\gamma_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\mu\gamma^{\nu}{}_{\nu}\partial^\mu\gamma^{\lambda}{}_{\lambda}\right], \qquad (1\text{-}49)$$

$$L_1 = -\frac{\varkappa}{4}\left[\gamma_{\mu\nu}\partial^\mu\gamma_{\lambda\rho}\partial^\nu\gamma^{\lambda\rho} + \gamma_{\mu\nu}\partial^\lambda\gamma^{\omega}{}_{\omega}\partial_\lambda\gamma^{\mu\nu} + 2\gamma^{\mu\nu}\partial^\rho\gamma_{\mu\lambda}\partial^\lambda\gamma_{\nu\rho} - 2\gamma^{\mu\nu}\partial^\lambda\gamma_{\mu\rho}\partial_\lambda\gamma^{\rho}{}_{\nu}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\gamma^{\lambda}{}_{\lambda}\partial_\nu\gamma^{\rho}{}_{\rho}\right] \qquad (1\text{-}50)$$

を得る．

このようにして $\varkappa$ の 1 次の項までは Lagrange 関数を定めることができた．$\varkappa^2$ 以上も非常に複雑であろうが定めることが可能であろう．しかし，このように定めたものが，どのような形にまとめられるか，Einstein の一般相対性理論を知らなければ予想できないであろう．この意味で Einstein が1905年の特殊相対性理論から1915年の一般相対性理論へと至った道筋を振り返ることは，非常に有意義なことであるので，次章でこれについて述べる．

第2章　特殊相対性理論から一般相対性理論へ

特殊相対性理論の出現により，19世紀までの時間・空間についての概念は深い修正を要求された．すなわち，同時性ということは，Lorentz 変換(1-8)が示すごとく，絶対的な概念ではなく，相対的なものに過ぎないことになった．Lorentz 共変性を満たす Maxwell 方程式に従う電磁場が有限な速度 c で伝播する場であるということは，重力の理論の変革をも要求した．それは，これまで重力は即時的な遠隔作用の力として扱われていたからである．特殊相対性理論を満たすように重力の理論を変更しようという試みが，Poincarè，Sommerfeld を始めとした有名な数学者や物理学者たちによってなされたが，満足するようなものは得られなかった．Einstein が不世出の天才であったのは，このような拡張的な試みとは異なり，重力と結びついた加速度の問題を根本課題にして重力を考えた点にある．Einstein は慣性系の間の速度は相対的とみなされているのに，加速度は特殊相対性理論では，なぜ相対的に取り扱われないのかという点から出発した．彼の考えは，重力の問題を手がかりに，特殊相対性理論をより普遍的な理論へ一般化することにあったと言えよう．

Einstein がこの設問について，はっきりと論文にのせたのは，1907年の論文の中のひとつの章「相対性原理と万有引力」においてであった．彼自身深く立ち入るつもりはないがと前置きをしながらも，加速系の問題は，特殊相対性理論の応用を考える人なら誰でも追求すべきものなので，自分も試みると書いている．Einstein は一様な加速度で動いている系と一様な重力場にある系とは区別できないと言う仮設（1912年の論文において，はじめて**等価原理**と呼ぶことになった）に立って，特殊相対性理論を応用することによって次の結果を得た．重力場の中にある時計の進み方を求め，太陽表面から地球上のある点にきた光の波長は，その点の同じ発光体からでる光の波長より，約50万分の1大きいことを示した．一方，電磁場に対する Maxwell 方程式から，光速が重力のある所では c と異なることを示し，これを用いて地球による光の屈曲の計算をすると非常に小さく観測にはかからないと述べた．

この1907年の論文に取組んでいた時の彼の思考について，彼自身は次のように述べている（モーガン原稿と呼ばれる発表されなかった論文[1]）．

「そのとき，次のような形で「私の生涯で最も素晴らしい考え」が浮かんだ．重力場は磁気電気誘導によって生じる電場に類似して，相対的存在にすぎない．なぜならば，家の屋根から自由落下している観測者にとって —— 少なくとも彼のごく近傍では —— 重力場は存在しないからである．実際，もし観測者が何か物体を落とすと，それは，個々の化学的ないし物理的性質に無関係に，その観測者に対して静止または一様運動の状態を保ち続ける（もちろん，この考察において，空気の抵抗は無視されている）．それゆえ，観測者は自分の状態を「静止しているもの」と解釈する権利を有する．

この考えによって，重力場の中では，すべての物体が同じ加速度で落下するという非常に独特の実験法則がただちに深い物理的意味を獲得した．すなわち，もしかりに重力場の中を他のすべての物体と異なる様式で落下する物体が一つでも存在すれば，その助けを借りて，観測者は自分が重力場の中にいてその中を落下していることを悟ることができるだろう．けれども，もしこのような物体が —— 経験が非常に正確に示してきたように —— 存在しないなら，観測者は自分を重力場の中で落下していると知覚する客観的手段を欠く．むしろ彼が，自分の状態を静止の一つと考え，そして自分の環境を重力に関して場の存在しない状態と考える権利がある．

実験的に知られているように落下の加速度が物体によらないことは，それゆえ，相対性の基本原理がおたがいに対して一様でない運動をしている座標系にまで拡張されねばならないという事実のための強力な論証となる．」

上記のような Einstein の深い洞察に立った1907年の論文であったが，先に述べた 2 つの結果を導く際の説明は Einstein 自身も述べているのであるが，わかり難いものであった．これから 3 年後（この間の彼の関心は主として量子論にあった），1907年の論文を改訂し，1911年「光の伝播に対する重力の影響について」[2] という論文を提出した．この中で，遠方の恒星からの光が太陽の重力場で曲げられる大きさは測定可能であることを示し，その測定の重要性を天文学者にも喚起した．まだこの論文でも誤りや，あいまいな推量が見受けられたが，全く新しい重力の理論を見出だす糸口になった重要なものである．

この論文の出発点となった上記の Einstein の考えは，**Einstein の箱の実験**と言われ，次の形に言い換えられる．重力源からずっと離れた場所で外界から遮断され

ている箱が一様な加速度 γ で引き上げられたとしよう．中にいる人の手から落としたものは，一様な加速度で落ちているとこの人は見るだろう．箱の内側の天井から分銅をつるしたバネも引き伸ばされるであろう．次に箱を γ と同じ重力加速度を持つ一様な重力場の中に止めたときも同じことが起こり，物の落ち方も，バネの伸びも等しいであろう．さらに箱を一様なこの重力場で落とせば，箱の中の人が落としたものは，落ちているようには見えず，この人は箱を慣性系であると考えるであろう．以上が意味することは，重力効果の尺度としての重力質量と，力によって加速される際の抵抗としての慣性質量は相等しいということである．これはまた，重力とこれを測る人の加速度運動による見掛け上の重力は本質的には同じもので，局所的には消すことも，作ることもできることを意味する．これが，1912年に Einstein によって，はっきりと等価原理と呼ばれた原理で，重力のない所で慣性系に対して加速度運動している座標系と，この加速度と逆向きの重力がある空間の中に固定された慣性系は，力学現象のみならず，すべての物理現象について，区別できないということである．力学現象については上の箱の実験から明らかであるが，これをすべての物理現象にまで拡張した点が重要である．Newton は上記の重力質量と慣性質量を暗に等しいと仮定したが，Einstein は，逆にこれを重力の基本原理におき，一般相対性理論を作ったのである．

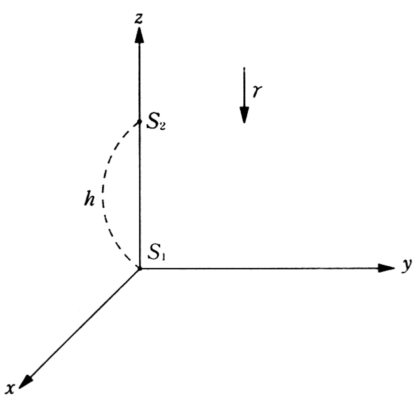


図 2-1

この等価原理を用いて，1911年の論文で行ったスペクトル線の赤方偏移および太陽の周りの光の屈曲の導出についてふれておこう．

図2-1のように重力加速度がγである一様な重力場の中の座標系Kのz軸上に同じ測定器をつけた２つの物体S_1，S_2がhの距離にあるとする．エネルギーE_2の光がS_2からS_1に送られたとき，S_1で測ったエネルギーE_1を求めよう．上の等価原理により，無重力の空間内にz軸の正の方向へ一様な加速度γで動いている系をK'とすると，Kの代りにK'をとり，重力の問題を扱うことができる．ただし，S_1，S_2はK'に固定してあるものとする．特殊相対性理論を利用するため，加速度運動をしていない座標系K_0をS_2から光が出される瞬間には，K_0から見てK'の速度は０となるようにとろう．S_2から出された光の運動量は，$p_{2,x}=p_{2,y}=0$；$p_{2,z}=-E_2/c$である．時間h/cの後に光がS_1に達した時のS_1はK_0に対し$v=\gamma h/c$で動く慣性系とみなしてLorentz変換式（(1-8)の脚注を参照）

$$E_1=(E_2-vp_{2,z})/\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (2\text{-}1)$$

を用いると，S_1でみた光のエネルギーは近似的に

$$E_1=E_2(1+v/c)=E_2(1+\gamma h/c^2) \qquad (2\text{-}2)$$

となる．

等価原理から，一様な重力場の中に設定された座標系Kにおいて，同じ過程に対して同じ関係式が成立する．γhをS_2における重力ポテンシャルΦとすると

$$E_1=E_2(1+\Phi/c^2) \qquad (2\text{-}3)$$

のように表わされる．

K_0系でドップラー効果を考えて（Eと光の振動数νとの関係式を用いてもわかる），S_2で出された光の振動数ν_2と，S_1で受信されたこの光の振動数ν_1との間の関係式として

$$\nu_1=\nu_2(1+\Phi/c^2) \qquad (2\text{-}4)$$

が得られる．これから，1907年の論文のスペクトル線の赤方偏移の値が導かれる*)．

(2-4)で与えられた振動数の変化から，K系での時計の進み具合は，原点S_1における時計が$(1+\Phi/c^2)$秒進む間にS_2における時計は１秒進むようにとるべきこ

---

*) ここで与えた導出は，特殊相対性理論と等価原理とによっている．一般相対性理論が数学的にも完成された後には，曲ったRiemann空間での計量テンソルg_{00}の平坦時空からのずれによって導かれる．

とを意味する．これから座標系Kの原点（重力ポテンシャルを0とする）における光速度をcとすると，重力ポテンシャル$\Phi(x)$のところでは，光の速度は

$$c(x)=c(1+\Phi(x)/c^2) \tag{2-5}$$

となる．この式とHuygensの原理から，太陽の周辺を通る光の屈曲角度は0.83秒であることが示された．しかし，これは実際の値の1/2であった．その理由は時計にのみ重力の影響を考え，物指しについては考慮しなかったためで，後者に対する重力の影響を考えれば，2倍になることが1916年の完成された論文では示されている．

等価原理は大局的なものではなく，局所的なものなので，一様でない重力場に対しても適用でき，考えている点のごく近傍で成立する．1912年「光速度と重力場の静力学」という論文で，物質密度が$\rho(x)$のときの光速度$c(x)$の満たす式として次式を提出した．

$$\triangle c(x)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)c(x)=\frac{1}{c^2}G\rho(x)c(x). \tag{2-6}$$

(2-6)の右辺に対して，電荷をもつ粒子と電磁場から成る系をあてはめると，ρは力学的項と電磁気的項の和で置き換えられるべきであり，Einsteinはこの和をσで表示した．しかし，この理論ではエネルギー・運動量保存則が満たされず，彼は最終的に方程式

$$\triangle c(x)=\frac{G}{c^2}\left\{c(x)\sigma(x)+\frac{c^2}{2G}\frac{(\nabla c(x))^2}{c(x)}\right\} \tag{2-6$'$}$$

に到達した．右辺の第2項は重力場のエネルギー密度とみなされるもので，この時からEinsteinは重力場の非線形理論にとり組んでいたのである．

なお，同じ1912年に発表されたもう1つの論文では，Maxwell-Lorentz方程式に現われるcは，作用と反作用の原理を満たすためには(2-6)でなく

$$\triangle c^{1/2}(x)=\frac{G}{2c^2}\rho(x)c^{1/2}(x) \tag{2-6$''$}$$

を満たすべきであるとしている．$c(x)$に対する(2-6)，(2-6′)，(2-6″)の式は今日から見てはもちろん，当時でも納得し難いものである．ただEinsteinは光の経路については，上記の1912年の論文で，次の変分原理

$$\delta\int\{c^2(x)dt^2-dx^2-dy^2-dz^2\}^{1/2}=0 \tag{2-7}$$

から導かれるべきであると，すでに提唱していた．

(2-7)の｛　｝の中を

$$-ds^2 = c^2(x)dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (2\text{-}8)$$

とする．この ds^2 は Lorentz 変換に対して不変でなく，物指しの方にも，ひずみを与えなければならないことを暗示している．Einstein 自身(2-6)，(2-6′)，(2-6″)の不満さに加えて，このことから重力場を $c(x)$ のみで表現することは無理で，空間も時間と同様にひずむことを考慮して，10成分の計量テンソル $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$ を導入し，(2-8)を

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu\,;\,(x^0 = ct\,, x^1 = x\,, x^2 = y\,, x^3 = z) \qquad (2\text{-}9)$$

と拡張し，時空座標 x^μ に依存する10個の計量テンソルが重力場と密接に結びついているという考察に到達した．さらに，Einstein が(2-9)に伴う不変量と共変量の理論の必要性を痛感したのは，1912年 8 月にチューリッヒに転居する直前頃であった．8 月にチューリッヒに戻ったとき，親友の数学者 Grossmann に，(2-9)を不変にする幾何学が必要なのだが，それを調べてくれるように頼んだ．Grossmann は Einstein が探しているのは Riemann 幾何学だと答え，あれは大変こみ入っていて物理学者の巻き込まれるべきものではないといった．そして，Riemann 幾何学の微分方程式は非線形であることも指摘した．しかし，この非線形性こそ，Einstein の求めていたものであった．探し求めていた手だてを数学者が既に完璧に用意していたという認識は強い衝撃となり，その後の彼の物理観に大きな影響を与えた．

重力と計量テンソルの結びつきを提起したのは1914年の論文「一般相対性理論および重力論の草案」[3]である．しかし，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の導入によって，時空座標 x^μ と物指しや時計を使って測定して得られる距離や時間との関係がはっきりしなくなるという難点が生じた．特殊相対性理論では静止している剛体上の任意の 2 点を決めると，これには常にある定まった長さが対応し，この長さは物指しとして使われる剛体の位置や方向，また測定を行う時刻には無関係であった．一方，時計についても，座標系に対して静止している時計の針の位置を 2 回指定すれば，それに応じて，定まった時間間隔がきめられ，時間は時計の位置や測定の時間に無関係であった．しかし(2-9)のような線素を導入する以上，2 点間の空間座標の差が直接に単位物指しによって，また時間座標の差も標準時計によって測定できるよう

に，空間的・時間的な長さを定義することはできなくなるであろう．

この点について，もっと立ち入って考えるため，座標の意味を見直してみよう．物理現象は，究極には 2 つの物体の衝突問題に帰せられるので，2 台の車の衝突事件を考えよう．この事件を記述するには場所を示す 3 つの数と時間を示す 1 つの数の合計 4 つが必要で，この 1 組の数が時空座標である．京都の街のように道が等間隔に並び，それに応じて番地がつけられていれば，事件現場と現在地との距離はすぐわかるが，曲りくねった通りを基本に番地がつけられていれば，番地は近くても距離は長い場合がある．後者のような場合には，番地の違いと距離の間には，場所ごとに異なる換算率をつけねばならない．この換算率が計量テンソルに外ならない．このように事件の記述がわかりやすく簡単にできるかどうかの差はあるが，現実には事件は起っており，時空座標のとり方には無関係なはずである．したがって自然法則の定式化には，連続でなめらかな座標系であれば，どれも同等であり，自然法則も任意の座標変換に対して同じ形をとるべきである．これが，**一般共変原理**，あるいは**一般相対性原理**と呼ばれるものである．

注意しておきたいことは，計量のみで空間の曲りが定まる訳ではない．ある適当な座標変換で，直線座標系への移行が可能であり，これのみで全時空が覆われていれば時空は平坦な Minkowski 時空である．これに反して，全時空がひとつの Minkowski 時空にならないときは，時空が実際に曲っている場合である．前者の場合は見かけ上のひずみで，重力も見かけだけのものである．後者の場合が本当の重力場があるときである．しかし等価原理により，各時空点の極めて近い所では，局所的には Minkowski 時空に変換され，重力も局所的に消去できる．

Einstein に残された大きな問題は，一般共変原理に適するように物理法則をどう定式化するかであった．粒子や光の運動経路については，線素 ds が(2-9)で与えられ，(2-9)は一般座標変換で不変であるので，$\delta\int ds=0$ で決定されるべきであるという結論に達しえたであろう．計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ を定める式については，Einstein は何年間も悩み続けた．1914年の先に挙げた論文以前では(2-6)，(2-6′)，(2-6″)のように奇妙なものであった．1914年の論文では，$g_{\mu\nu}(x)$ の共変微分が 0 であるという理由から，$g_{\mu\nu}$ を定める式は共変的に書くことができなかった．ここで Einstein は，重力自体については一般共変性を破らねばならぬとさえ結論した．同じ1914年の「一般相対性理論の形式的基礎」という長い論文は，数学的にも整備され，完成一歩手前にあったが，ここでも，領域の境界で $g_{\mu\nu}$ と $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$ を与え

ても領域の内部では自由に座標変換ができるので，$g_{\mu\nu}(x)$ は一意的には定まらないことを強調した．この論文で興味あるのは，物質と重力場に相当するエネルギー・運動量が保存されるように $g_{\mu\nu}$ の 2 階微分を含んだ条件式を与えたことである．これは後の発展のための重要な糸口になった．Grossmann との共著で同じ1914年，「一般相対性理論による重力場の方程式の共変性」という論文を書き，上述の条件式が変分原理から導かれることを示した．しかし，ここでも条件式は一般共変的ではないが，やや大きな座標変換群に限ると不変であることを示した．現在から見ると，一般座標変換で $g_{\mu\nu}(x)$ の関数形が変わるということに過ぎないのであったが，これらの錯誤は $g_{\mu\nu}(x)$ が，源であるエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ によって完全に決まると考えたことに起因する．言い換えれば，Riemann 幾何学における Bianchi の恒等式に気づかなかったのである．

1915年，3 年間の無駄な努力の後，間違いに気がついた Einstein は「一般相対性理論について」という論文において，初めて一般共変的な重力場の方程式を提出した．しかし，ここでは $(-\det(g_{\mu\nu}))^{1/2}=1$ とおいたので，この方程式は物質のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}=0$ を満たす場合にしか適用できなかった．しかし直後に書いた「重力の場方程式」で訂正された．

翌1916年，総決算として「一般相対性理論の基礎」という64頁の論文［4］にまとめられ，本書の第 3，4 章のような現在の形に仕上げられた．Einstein の1905年の特殊相対性理論の第 1 論文が，それ自体完成された理論であったのに対し，現在，一般相対性理論として知られている理論の構造に到達するのに，天才をもってしても 8 年におよぶ苦闘を必要とした．1905年の理論が純粋に運動学的(kinematics)であるのに対し，一般相対性理論は kinematics と dynamics の入り組んだ仕組みから成っており，その内容は現在に到るまで完全に解かれたとはいえない．

終りにつけ加えねばならないことは，この壮大な理論が，確立されると同時に実験的な確証も一部与えられた点である．当時，60年以上にわたって解決の困難であった水星の軌道の永年回転を，特別な仮定を必要とせず定量的に説明できたことは，Einstein の生涯で最も強く感動した経験であった．この問題およびもう 1 つの大きな発見である太陽の周りでの光の屈曲については，第 4 章および第 7 章で詳しく述べる．

第3章　Riemann 空間におけるテンソル解析

一般共変原理に沿って，物理法則を座標系のとり方によらない形式に表わすための数学的手段は，第2章で述べたように Riemann 空間におけるテンソル解析である．以下の章の議論に必要な最小限のことがらを挙げておく．

§3-1　スカラー，ベクトル，テンソル，テンソル密度

4次元連続体の2点の座標を x^μ，$x^\mu + dx^\mu$ とするとき，これらの間の不変距離は前章の(2-9)で述べたように，各点での**計量** $g_{\mu\nu}(x)$ によって，

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \tag{3-1}$$

で与えられる．この様な連続体が **Riemann 時空**と呼ばれる．$g_{\mu\nu}$ はまったく自由ではなく，x^0 が時間的，他の x^i が空間的な座標であるためには*)

$$g_{00}<0\,;\ g_{ii}>0\,;\ \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ij} \\ g_{ji} & g_{jj} \end{vmatrix}>0\,;\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}>0\,;$$

$$g \equiv \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} <0 \tag{3-2}$$

を満たさなければならない．以下 $g=\det(g_{\mu\nu})$ として，しばしば用いる．

座標系 (x^μ) から座標系 (x'^μ) への変換則は，**一般座標変換**と呼ばれ，

$$x'^\mu = f^\mu(x^\lambda) \tag{3-3}$$

---

*)　3番目の不等式(i，$j=1$，2，3)および4番目の不等式は，2次形式 $\sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}dx^i dx^j$ が常に正となるための判別式から得られる．

で与えられる．変換の Jacobian は f^μ が独立であるためには，

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)}=\frac{\partial(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}\neq 0 \tag{3-4}$$

でなければならない．

変換(3-3)に対して，点 x に依存する量 $S(x)$ が

$$S'(x')=S(x) \tag{3-5}$$

のとき $S(x)$ を**スカラー**と呼ぶ．ここで座標 x'^μ と x^μ とは時空内の同じ点のものである．

(3-3)から次式が成立する．

$$dx'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu. \tag{3-6}$$

4 個の関数の組 $A^\mu(x)=(A^0(x),A^1(x),A^2(x),A^3(x))$ がこの(3-6)と同じ変換則

$$A'^\mu(x')=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}A^\nu(x) \tag{3-7}$$

で与えられるとき，A^μ を**反変ベクトル**という．次の変換則

$$B'_\mu(x')=\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}B_\nu(x) \tag{3-8}$$

によって**共変ベクトル**は定義される．

これらを一般化して，***m*階反変 *n* 階共変テンソル** $T^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\nu_1\cdots\nu_n}$ が次の変換則によって定義される．

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_m}_{\nu_1\cdots\nu_n}(x')=\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\rho_m}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x'^{\nu_n}}T^{\rho_1\cdots\rho_m}_{\sigma_1\cdots\sigma_n}(x). \tag{3-9}$$

(3-2)の最後の条件により，$g_{\mu\nu}$ に対し

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}=\delta_\mu{}^\lambda \tag{3-10}$$

なる $g^{\nu\lambda}$ が存在する．$g^{\mu\nu}, g_{\lambda\rho}$ を用いてテンソルの添字の上げ下げ，すなわち，$T^\mu{}_{\nu\lambda}=g^{\mu\rho}T_{\rho\nu\lambda}$, $T_\mu{}^{\nu\lambda}=g_{\mu\rho}T^{\rho\nu\lambda}$ 等が行われる．これによりテンソルの上ツキ，下ツキの添字を等しくし，0 から 3 までたし合わせる**縮約**，たとえば $S^\mu{}_{\nu\lambda}=T^{\mu\rho}{}_{\rho\nu\lambda}=g_{\rho\sigma}T^{\mu\rho\sigma}{}_{\nu\lambda}$，という操作や，テンソルの和と差や積も定義され全体としてテンソル代数を作っている．テンソルの和と差は同種類のテンソルの間で行われ，テンソルの積は，たとえば $R_{\mu\nu}{}^{\lambda\rho}{}_\sigma=S_{\mu\nu}R^{\lambda\rho}{}_\sigma$ の様に定義される．$dx^\mu dx^\nu$ と $g_{\mu\nu}$ の縮約に

よって(3-1)の ds^2 はスカラー量である．同種類のテンソルの間で成り立つ等式は座標変換によって不変なことは容易にわかる．したがって，テンソルの間の等式として物理法則を書いておけば，一般相対性原理の要請を満たしている．

テンソルに加えて**テンソル密度**も次の変換則に従うものとして導入される．

$$\boldsymbol{T}'_{\mu}{}^{\nu\lambda}(x') = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\boldsymbol{T}_\alpha{}^{\beta\gamma}(x), \tag{3-11}$$

ここで $\partial(x)/\partial(x')$ は(3-4)で与えた Jacobian と $\partial(x)/\partial(x')\cdot\partial(x')/\partial(x)=1$ で結ばれたものである．特別な密度量として $\sqrt{-g}$ がある．

$$g'(x') = \det(g'_{\mu\nu}(x')) = \det\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\right) = \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)^2 g(x)$$

より

$$\sqrt{-g'(x')} = \frac{\partial(x)}{\partial(x')}\sqrt{-g(x)} \tag{3-12}$$

の変換則が導かれ，$\sqrt{-g}$ は**スカラー密度**である．$d^4x' = \dfrac{\partial(x')}{\partial(x)}d^4x$ であるので

$$\sqrt{-g'(x')}d^4x' = \sqrt{-g(x)}\,d^4x \tag{3-13}$$

が成り立つ．スカラー密度 $\boldsymbol{S}(x)$ をある時空領域で積分したものは不変である．すなわち，

$$\int \boldsymbol{S}(x)d^4x = \int \boldsymbol{S}'(x')d^4x'. \tag{3-14}$$

$\boldsymbol{S}(x)$ の特別な場合として $\sqrt{-g(x)}S(x)$ （$S(x)$ はスカラー） がある．

テンソル密度を拡張して，次のような変換

$$\boldsymbol{V}'_{\mu}{}^{\nu\lambda}(x') = \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)^n\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma}\boldsymbol{V}_\alpha{}^{\beta\gamma}(x) \tag{3-15}$$

をするものを，**ウェイトが n のテンソル密度**という．ただし $n=0, \pm1, \pm2,$ …… である．

スカラー密度によく似たものとして，**完全反対称4階テンソル密度**（ウェイトが1）$\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ がある．これは $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が 0，1，2，3 の偶置換なら 1，奇置換なら -1 と定義した量である．$\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ がウェイト 1 の 4 階テンソル密度の変換法則に従うものとすると

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^{\alpha\beta\gamma\delta}(x')=\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\delta}}{\partial x^{\rho}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu\nu\lambda\rho}=\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial(x')}{\partial(x)}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

となり，どんな座標系でも同じ値の成分をもつことがわかる．

ウェイトが -1 の 4 階反対称テンソル密度 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}=-g^{-1}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g_{\gamma\lambda}g_{\delta\rho}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \tag{3-16}$$

と定義する．$\boldsymbol{\varepsilon}^{0123}=1$ なら $\boldsymbol{\varepsilon}_{0123}=-1$ である．以上から

$$E^{\mu\nu\lambda\rho}(x)=\frac{1}{\sqrt{-g}}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mu\nu\lambda\rho}, \tag{3-17}$$

$$E_{\mu\nu\lambda\rho}(x)=\sqrt{-g}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\rho} \tag{3-17'}$$

はそれぞれ完全反対称 4 階反変，共変テンソルである．このように定義されたテンソルは

$$E_{\mu\nu\lambda\rho}=g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}g_{\lambda\gamma}g_{\rho\delta}E^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{3-18}$$

という関係で結ばれている．$E_{\mu\nu\lambda\rho}, E^{\alpha\beta\gamma\delta}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mu\nu\lambda\rho}, \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は次のような関係式を満たす．

$$E^{\mu\nu\sigma\tau}E_{\mu\nu\lambda\rho}=-2!\,\delta^{\sigma\tau}{}_{\lambda\rho}=-2(\delta^{\sigma}{}_{\lambda}\delta^{\tau}{}_{\rho}-\delta^{\sigma}{}_{\rho}\delta^{\tau}{}_{\lambda}), \tag{3-19}$$

$$E^{\mu\nu\lambda\rho}E_{\mu\nu\lambda\sigma}=-3!\,\delta^{\rho}{}_{\sigma}, \tag{3-20}$$

$$E^{\mu\nu\lambda\rho}E_{\mu\nu\lambda\rho}=-4!. \tag{3-21}$$

§ 3-2　共変微分

計量テンソルの時空座標についての微分で表わされる量として，**Christoffel シンボル**と呼ばれるものがある．これは重力場の中での粒子の運動方程式において重要な役割を果たすものであり，次式で定義される．

$$\Gamma_{\lambda\rho\sigma}=\frac{1}{2}(\partial_{\sigma}g_{\lambda\rho}+\partial_{\rho}g_{\lambda\sigma}-\partial_{\lambda}g_{\rho\sigma}), \tag{3-22}$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}=g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\rho\sigma}. \tag{3-23}$$

テンソルでなくシンボルと呼ばれる理由は，座標変換に対する変換則が下に示すようにテンソルの変換をしないためである．$g_{\mu\nu}$ の変換則から

$$\Gamma'_{\lambda\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\nu}}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}(x)+g_{\alpha\beta}(x)\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}, \tag{3-24}$$

同様に

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}(x) + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\rho} \partial x'^{\sigma}} \tag{3-25}$$

の変換則が得られ*)，これらの式の右辺第2項がテンソルとしての変換則を破っている．(3-23)から

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_{\mu} g_{\lambda\rho}. \tag{3-26}$$

行列式の微分の公式から

$$\partial_{\mu} g = g g^{\lambda\rho} \partial_{\mu} g_{\lambda\rho} \tag{3-27}$$

が得られるので，

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} = \partial_{\mu}(\ln\sqrt{-g}) \tag{3-28}$$

と書かれる．

ここで本題の共変微分についてふれよう．スカラー ϕ の時空座標についての通常の微分をとれば，共変ベクトル $\partial_{\mu}\phi$ が得られる．しかし，反変ベクトル A^{μ} を座標 x^{ν} について微分したものは

$$\partial_{\nu} A^{\mu}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^{\nu}} [A^{\mu}(x + \Delta x) - A^{\mu}(x)] \tag{3-29}$$

と，異なる点における反変ベクトルの差により定義されるのでテンソルではない．実際，変換則は

$$\partial'_{\nu} A'^{\mu}(x') = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial A^{\rho}(x)}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} A^{\rho}(x) \tag{3-30}$$

となる．そこで，(3-25)を考慮すると，この式は

$$\partial'_{\nu} A'^{\mu}(x') = (\partial_{\lambda} A^{\rho}(x) + A^{\sigma}(x) \Gamma^{\rho}{}_{\sigma\lambda}(x)) \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} - A'^{\lambda}(x') \Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x') \tag{3-30'}$$

となる．したがって

$$\nabla_{\nu} A^{\mu}(x) = \partial_{\nu} A^{\mu}(x) + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}(x) A^{\lambda}(x) \tag{3-31}$$

と定義すれば，(3-30′)は

$$\nabla'_{\nu} A'^{\mu}(x') = \nabla_{\lambda} A^{\rho}(x) \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \tag{3-32}$$

---

*）変換(3-25)に従う量は一般に affine 係数と呼ばれる．

となり $\nabla_\nu A^\mu$ はテンソルの変換性をもつ．(3-31)が反変ベクトルに対する**共変微分**の定義である．同様に共変ベクトル A_μ に対しても共変微分を

$$\nabla_\nu A_\mu(x) = \partial_\nu A_\mu(x) - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x) A_\lambda(x) \tag{3-33}$$

と定義すれば，$\nabla_\nu A_\mu$ は 2 階共変テンソルの性質をもつ．一般のテンソルに対しても

$$\nabla_\omega T^{\mu\nu\lambda\cdots}{}_{\rho\sigma\cdots}(x) = \frac{\partial}{\partial x^\omega} T^{\mu\nu\lambda\cdots}{}_{\rho\sigma\cdots}(x) + \Gamma^\mu{}_{\alpha\omega}(x) T^{\alpha\nu\lambda\cdots}{}_{\rho\sigma\cdots}(x)$$

$$+\Gamma^\nu{}_{\alpha\omega}(x) T^{\mu\alpha\lambda\cdots}{}_{\rho\sigma\cdots}(x) + \cdots - \Gamma^\alpha{}_{\rho\omega}(x) T^{\mu\nu\lambda\cdots}{}_{\alpha\sigma\cdots}(x) - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\omega}(x) T^{\mu\nu\lambda\cdots}{}_{\rho\alpha\cdots}(x) + \cdots \tag{3-34}$$

と定義される．

$\partial_\nu A^\mu(x)$ に対する(3-29)の定義は，異なる点での反変ベクトルを比べたものであった．テンソルの変換性を示す(3-31)の $\nabla_\nu A^\mu(x)$ は，$A^\mu(x)$ を点 $x+\Delta x$ に次に述べるような**平行移動**をした $A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$ と $A^\mu(x+\Delta x)$ との差で与えられる．$A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}$ として

$$A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/} = A^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}(x)\Delta x^\lambda A^\rho(x) \tag{3-35}$$

と定義する．この意味で $\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}(x)$ は**接続係数**と呼ばれる．同様に共変ベクトルに対しては

$$A_\mu(x+\Delta x)_{/\!/} = A_\mu(x) + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(x)\Delta x^\nu A_\lambda(x). \tag{3-35$'$}$$

一般のテンソルに対しても，(3-34)を参照して定義される．実際に，平行移動ベクトルを用いて

$$\begin{aligned} A^\mu(x+\Delta x) - A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/} &= A^\mu(x+\Delta x) - A^\mu(x) - (A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/} - A^\mu(x)) \\ &= (\partial_\nu A^\mu(x) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu}(x) A^\lambda(x))\Delta x^\nu = \nabla_\nu A^\mu(x)\Delta x^\nu \end{aligned} \tag{3-36}$$

となり，$\lim_{\Delta x\to 0}\{A^\mu(x+\Delta x) - A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/}\}/\Delta x^\nu$ が $A^\mu(x)$ の共変微分となる．これが共変微分の幾何学的解釈である．

パラメータ λ により記述された曲線上のベクトル A^μ に対する

$$\frac{DA^\mu(x)}{D\lambda} = \frac{dA^\mu(x)}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}(x)\frac{dx^\rho(\lambda)}{d\lambda} A^\nu(x) \tag{3-37}$$

は λ についての**共変微分**，あるいは $x^\mu(\lambda)$ に沿った**絶対微分**と呼ばれ，粒子の共変的運動方程式に現われるものである．

共変微分の定義式(3-34)を用いると，計量テンソル $g_{\mu\nu}$（以下，$g_{\mu\nu}(x)$ の x は必要な場合の外，省略する）に対して次の式が得られる．

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda}.$$

この式に(3-22)を代入すると

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0, \tag{3-38}$$

同様に

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0, \tag{3-39}$$

を得る．したがって，Δx の 1 次までの範囲で

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)_{/\!/} = g_{\mu\nu}(x+\Delta x). \tag{3-40}$$

(3-38)～(3-40)の性質を有することが計量テンソルが**基本テンソル**と呼ばれるゆえんである．

(3-38)を再び用いると

$$g_{\mu\nu}(x+\Delta x)A^\mu(x+\Delta x)_{/\!/} A^\nu(x+\Delta x)_{/\!/} = g_{\mu\nu}(x)A^\mu(x)A^\nu(x)$$

となり，平行移動により，Riemann 空間のベクトルの大きさは不変である．逆にこの要請から平行移動を定義することができる．

終りに，共変微分に関するいくつかの公式を挙げておく．

反変ベクトルの **4 次元発散**（div）として

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\{A^\mu\} &= \nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\lambda\mu} A^\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\,A^\mu).\end{aligned} \tag{3-41}$$

Gauss の定理を用いると，

$$\int_\Sigma \sqrt{-g}\operatorname{div}\{A^\mu\}dx^0\cdots dx^3 = \int_{\partial\Sigma} A^\mu dV_\mu, \tag{3-42}$$

ここで $\partial\Sigma$ は 4 次元領域 Σ の 3 次元境界，dV_μ はその体積要素であり，(3-17′)の $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ および 3 個の独立な無限小変位ベクトル dx^μ，δx^μ，Δx^μ より

$$dV_\mu = -\frac{1}{3!}E_{\mu\nu\lambda\rho}\begin{vmatrix} dx^\nu & \delta x^\nu & \Delta x^\nu \\ dx^\lambda & \delta x^\lambda & \Delta x^\lambda \\ dx^\rho & \delta x^\rho & \Delta x^\rho \end{vmatrix}$$

と表わされる．

2 階反変ベクトルに対しては次のようになる．

$$\nabla_\nu V^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu(\sqrt{-g}\, V^{\mu\nu}) + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} V^{\lambda\nu}. \tag{3-43}$$

$V^{\mu\nu}$ が反対称テンソル $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ なら

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu(\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}). \tag{3-44}$$

共変ベクトル A_μ の**カール**は

$$\mathrm{curl}_{\mu\nu}\{A\} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3-45}$$

スカラー φ に対する **4 次元 d'Alembert 演算子**は次式で与えられる．

$$\Box\, \varphi = \mathrm{div}\{\mathrm{grad}\, \varphi\} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi). \tag{3-46}$$

§3-3　曲率テンソル

共変微分に関する公式

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\lambda = \partial_\mu \nabla_\nu A_\lambda - \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} \nabla_\nu A_\rho - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} \nabla_\rho A_\lambda \tag{3-47}$$

および添字 μ と ν を入れ替えたものとの差をとると

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A_\lambda = R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} A_\rho, \tag{3-48}$$

ここで

$$R^\rho{}_{\lambda\nu\mu} = \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \tag{3-49}$$

であり，この $R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}$ が **Riemann 曲率テンソル**と呼ばれるものである．このテンソルの幾何学的意味を考えよう．反変ベクトル A^μ を図 3-1 のように，1 点 x から，$x+dx$，$x+dx+\delta x$，$x+\delta x$ を経てもとの点まで(3-35)に従って平行移動したものと，もとの A^μ との差をとると

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2} R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} A^\nu (dx^\lambda \delta x^\rho - dx^\rho \delta x^\lambda) \tag{3-50}$$

と表わされる．このとき，面積要素（$dx^\lambda \delta x^\rho - dx^\rho \delta x^\lambda$）の係数に現われるのが Riemann 曲率テンソルである．時空が平坦な Minkowski 空間であるための必要十分条件は

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = 0 \tag{3-51}$$

である．これはテンソル式であるので座標系のとり方によらない．

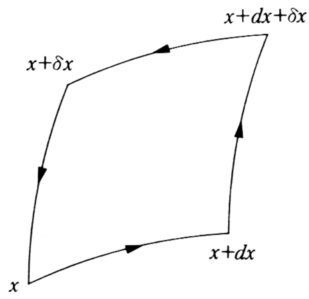


図 3-1

(3-49), (3-22) より次式を得る

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = g_{\mu\sigma}R^{\sigma}{}_{\nu\lambda\rho} = -\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu\rho} - g^{\sigma\omega}(\Gamma_{\sigma\mu\lambda}\Gamma_{\omega\nu\rho} - \Gamma_{\sigma\mu\rho}\Gamma_{\omega\nu\lambda})$$

$$= \frac{1}{2}(-\partial_\nu\partial_\rho g_{\mu\lambda} - \partial_\mu\partial_\lambda g_{\nu\rho} + \partial_\nu\partial_\lambda g_{\mu\rho} + \partial_\mu\partial_\rho g_{\nu\lambda})$$

$$-g^{\sigma\omega}(\Gamma_{\sigma\mu\lambda}\Gamma_{\omega\nu\rho} - \Gamma_{\sigma\mu\rho}\Gamma_{\omega\nu\lambda}). \tag{3-52}$$

この式から次の恒等式

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\nu\mu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\lambda\rho\mu\nu}, \tag{3-53}$$

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} + R_{\mu\lambda\rho\nu} + R_{\mu\rho\nu\lambda} = 0 \tag{3-54}$$

が導かれる．これらを考慮すると $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ の中の独立な成分は20個であることがわかる．

Riemann 曲率テンソル $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ から，次の **Ricci テンソル** $R_{\mu\nu}(=R_{\nu\mu})$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} = -\partial_\lambda \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\nu \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\lambda} + \partial_\mu \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\lambda}) + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\rho}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$$

$$\tag{3-55}$$

が定義される．さらに **Ricci スカラー**として

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} \tag{3-56}$$

が得られる．**Einstein の重力方程式**に現われる **Einstein テンソル**と呼ばれる

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \tag{3-57}$$

も定義される．さらに，**Weyl の共形テンソル**

$$C_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\mu\nu\lambda\rho} + \frac{1}{2}(g_{\mu\lambda}R_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}R_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda}R_{\mu\rho} + g_{\nu\rho}R_{\mu\lambda}) + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})R \tag{3-58}$$

を挙げておく．$C_{\mu\nu\lambda\rho}$ は $R_{\mu\nu\lambda\rho}$ の(3-53)と同じ対称性をもつ上に，

$$C^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda} = 0 \tag{3-59}$$

という性質ももつ．また，$C_{\mu\nu\lambda\rho} = 0$ なら，これを満たす空間の計量テンソルは $g_{\mu\nu} = e^{\lambda(x)}\eta_{\mu\nu}$ （$\lambda(x)$ は任意実関数）と書かれ，**共形平坦**と呼ばれる．

終りに，Riemann テンソル等を共変微分したものの間に成り立つ恒等式についてふれる．Christoffel シンボルの変換則(3-24)からわかるように，適当な座標変換によって，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は時空内の任意の 1 点 P においては必ず 0 にすることができる．この座標変換として(3-24)から，P のごく近傍において

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - x_{\mathrm{P}}{}^{\mu} + \frac{1}{2}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}(\mathrm{P})(x^{\nu} - x_{\mathrm{P}}{}^{\nu})(x^{\lambda} - x_{\mathrm{P}}{}^{\lambda}) \tag{3-60}$$

をとればよいことがわかる．このように考えている点の $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ が 0 になるような座標系を，**測地座標系**という．

点 P での測地座標系を用いると

$$\nabla_{\nu} R^{\mu}{}_{\lambda\rho\sigma} = -\partial_{\nu}\partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\rho} + \partial_{\nu}\partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\lambda\sigma} \tag{3-61}$$

と書かれる．したがって，この表式を用いて，点 P において次の関係式を得る．

$$\nabla_{\nu} R^{\mu}{}_{\lambda\rho\sigma} + \nabla_{\rho} R^{\mu}{}_{\lambda\sigma\nu} + \nabla_{\sigma} R^{\mu}{}_{\lambda\nu\rho} = 0. \tag{3-62}$$

この左辺は共変微分で書けているので，テンソル式とみられる．したがって測地座標系以外の一般の座標系でも成立する恒等式であり，**Bianchi の恒等式**と呼ばれる．

(3-62)に $g^{\lambda\rho}\delta^{\sigma}{}_{\mu}$ を掛けて，各添字についての和をとると

$$g^{\lambda\rho}(\nabla_{\nu} R^{\sigma}{}_{\lambda\rho\sigma} + \nabla_{\rho} R^{\sigma}{}_{\lambda\sigma\nu} + \nabla_{\sigma} R^{\sigma}{}_{\lambda\nu\rho}) = 0$$

となり，これは次のように書ける．

$$\nabla^{\lambda}\left(R_{\nu\lambda} - \frac{1}{2} g_{\nu\lambda} R\right) = \nabla^{\lambda} G_{\nu\lambda} = 0. \tag{3-63}$$

この式は，縮約 Bianchi の恒等式と呼ばれる．

第4章　重力場の方程式

§4-1　Einstein の方程式

Newton の重力場の方程式は，そのポテンシャルを $\Phi(x)$，源となる物質の密度を $\rho(x)$ とすると，

$$\triangle \Phi(x) = 4\pi G\rho(x) \tag{4-1}$$

と表わされる．これに対応する一般相対性原理に従う重力方程式は，10個の計量テンソルに対するテンソル方程式になるべきであることは，第2章において述べた．したがって(4-1)に対応するものとして，k を相互作用定数として，

$$E_{\mu\nu}(g_{\lambda\rho},\ \partial_\sigma g_{\lambda\rho},\ \partial_\sigma\partial_\omega g_{\lambda\rho}) = kT_{\mu\nu} \tag{4-2}$$

ととるのが自然な拡張と考えられる．右辺の $T_{\mu\nu}$ は，物質の速度が 0 のときは，エネルギー密度 $c^2\rho(x)$ に比例するものであろう．ここで c は光速度である．したがって，$T_{\mu\nu}$ としては物質の対称エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ をとるべきである．Minkowski 時空では，連続方程式 $\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0$ を満たしているので，Riemann 時空では，∂^ν を共変微分 ∇^ν で置き換えた

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0 \tag{4-3}$$

が成立する必要がある．よって，左辺の方も

$$\nabla^\nu E_{\mu\nu} = 0 \tag{4-4}$$

を満たすような $E_{\mu\nu}$ をとらねばならない．このような $E_{\mu\nu}$ としては，(3-63)を満たす Einstein テンソル(3-57)，すなわち

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{4-5}$$

をとるのが最も自然である．(4-2)の k の値を定めるため，$g_{00} = -1-2\Phi/c^2$，これ以外の計量テンソルは Minkowski 時空のものをとり，$T_{00} = -c^2\rho(x)$ として(4-2)に代入し，(4-1)と比べると

$$k=\frac{8\pi G}{c^4} \tag{4-6}$$

となる．結局，**Einstein の重力方程式**として

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{4-7}$$

が得られる．(4-7)の左辺には**宇宙項**と呼ばれる $\lambda g_{\mu\nu}$ も許されるが，ここでは考えないことにする．

作用関数から，変分原理によって，上の Einstein の重力方程式を導こう．求める作用関数として次のものをとる．

$$I=I_{\mathrm{G}}+I_{\mathrm{M}}=\frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}(\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}). \tag{4-8}$$

ここで，$\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}$ は物質場の Lagrange 関数で，$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}$ は

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}=-\frac{c^4}{16\pi G}R \tag{4-8$'$}$$

である．(4-8)の I_{G} の $g^{\mu\nu}$ についての変分は

$$\delta I_{\mathrm{G}}=-\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\{\sqrt{-g}\,R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}+g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\} \tag{4-9}$$

となる．右辺第 2 項は測地座標系では次のように書ける

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=-g^{\mu\nu}(\partial_\lambda\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}-\partial_\nu\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}).$$

同一点における 2 つの Christoffel シンボルの差である $\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の変換則からわかるように，テンソルの変換則に従う．よって一般の座標系で

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}=-\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma})$$

となり，$\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ は(3-41)より境界面上での積分に直せるので落とすことができる．($\delta g^{\mu\nu}$ および $\delta\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は積分域の境界面上で 0 とする．) $\delta\sqrt{-g}$ は

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

なので

$$\delta I_{\mathrm{G}}=-\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} \tag{4-9$'$}$$

と書かれる．一方，$T_{\mu\nu}$ を

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\,\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}) \tag{4-10}$$

と定義すれば

$$\delta I_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2c}\int\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{4-11}$$

であるから

$$\delta I = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} \tag{4-12}$$

が得られる．したがって，変分原理によって作用関数(4-8)から Einstein の重力方程式(4-7)が導かれることが示された．

ここで，物質場のない外部領域，すなわち $T_{\mu\nu}=0$ の領域での，(4－7)の解を求めよう．時間に関して定常で，空間的に球対称なときには，厳密に解かれ，**Schwarzschild の外部解**と呼ばれている解が存在する．座標 x^μ として $x^\mu=(ct, r, \theta, \varphi)$ をとり，線素を

$$ds^2 = -\beta(r)c^2dt^2+\alpha(r)dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2) \tag{4-13}$$

と置く．よって計量テンソルの成分はおのおの

$$g^{00}=\frac{1}{g_{00}}=-\frac{1}{\beta}\,;\ g^{11}=\frac{1}{g_{11}}=\frac{1}{\alpha}\,;$$

$$g^{22}=\frac{1}{g_{22}}=\frac{1}{r^2}\,;\ g^{33}=\frac{1}{g_{33}}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta} \tag{4-14}$$

となる．これから Christoffel シンボルは(ここでは添字についての和はとらない)

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}=\frac{1}{g_{\mu\mu}}\frac{1}{2}(\delta^\nu{}_\mu\partial_\lambda g_{\mu\mu}+\delta^\lambda{}_\mu\partial_\nu g_{\mu\mu}-\delta_{\nu\lambda}\partial_\mu g_{\nu\nu}). \tag{4-15}$$

この $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ の中で 0 でないのは，次のものだけである．

$$\Gamma^0{}_{10}=\frac{\beta'}{2\beta}\,;$$

$$\Gamma^1{}_{00}=\frac{\beta'}{2\alpha}\,;\ \Gamma^1{}_{11}=\frac{\alpha'}{2\alpha}\,;\ \Gamma^1{}_{22}=-\frac{r}{\alpha}\,;\ \Gamma^1{}_{33}=-\frac{r\sin^2\theta}{\alpha}\,;$$

(4-16)

$$\Gamma^2{}_{12}=\frac{1}{r}\,;\quad \Gamma^2{}_{33}=-\sin\theta\cos\theta\,;$$

$$\Gamma^3{}_{13}=\frac{1}{r}\,;\ \Gamma^3{}_{23}=\cot\theta\,,$$

ただし，$'$ は r についての微分を意味する．これらを，右辺を 0 とおいた(4-7)に代入すると，

$$G^0{}_0=R^0{}_0-\frac{1}{2}\delta^0{}_0R=\frac{\alpha'}{\alpha^2 r}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=0\,, \tag{4-17 a}$$

$$G^1{}_1=R^1{}_1-\frac{1}{2}\delta^1{}_1R=-\frac{\beta'}{\alpha\beta r}+\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=0\,, \tag{4-17 b}$$

$$G^2{}_2=G^3{}_3=-\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)'-\frac{\alpha'\beta'}{2\alpha\beta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^2+\frac{\beta'}{\beta r}-\frac{\alpha'}{\alpha r}\right]=0 \tag{4-17 c}$$

となる．(4-17 c)は(4-17 a), (4-17 b)が満たされていると成り立つ．(4-17 a)から(4-17 b)を引くと，

$$\frac{\alpha'\beta+\alpha\beta'}{\alpha^2\beta r}=0\,,\qquad \text{よって}\quad (\alpha\beta)'=0\,.$$

これから

$$\alpha\beta=\text{const}\,. \tag{4-18}$$

ここで

$$A=\frac{1}{\alpha} \tag{4-19}$$

とおき，(4-17 a)に $-r^2$ を掛けた式を考えると

$$rA'+A-1=0\,,\ \text{よって}\,(rA)'=1\,. \tag{4-20}$$

積分定数を r_0 として次の解を得る．

$$A=1-\frac{r_0}{r}\,,\ \text{あるいは}\ \alpha=\frac{1}{1-r_0/r}\,. \tag{4-21}$$

β は(4-18)から，時間座標のスケールを適当にとり

$$\beta=\frac{1}{\alpha}=1-\frac{r_0}{r} \tag{4-22}$$

となる．Newton 近似との対応から，重力場を作っている物質の全質量をMとすると

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \tag{4-23}$$

であることがわかる．r_0 は **Schwarzschild 半径**と呼ばれる．結局(4-13)は，

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_0}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4-24}$$

で与えられる Schwarzschild の外部解となる．

ここで，座標変換，$r \to r'$，

$$r = \left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^2 r'\ ;\ 1-\frac{r_0}{r} = \frac{\left(1-\frac{r_0}{4r'}\right)^2}{\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^2}\ ;\ dr = \left(1-\frac{{r_0}^2}{16r'^2}\right)dr' \tag{4-25}$$

を行うと，4 次元線素は

$$ds^2 = -c^2\frac{\left(1-\frac{r_0}{4r'}\right)^2}{\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^2}dt^2 + \left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^4(dr'^2+r'^2d\theta^2+r'^2\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4-26}$$

となる．これは空間部分の線素が 3 次元平坦空間のそれに比例しているので，等方座標系と呼ばれる．

Schwarzschild の解のほかに，よく知られているものとして，z 軸方向に回転している物体の外部重力場の厳密解と解釈される **Kerr の解**がある．この導出はここでは略し，結果のみを以下で与える．

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{\Lambda}{\rho^2}(cdt-h\sin^2\theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)d\varphi - hcdt]^2 \\ &+\frac{\rho^2}{\Lambda}dr^2+\rho^2d\theta^2, \end{aligned} \tag{4-27}$$

ただし

$$\Lambda = r^2 - \frac{2GMr}{c^2} + h^2\ ;\ \rho^2 = r^2 + h^2\cos^2\theta \tag{4-28}$$

で，h は実定数で，重力の源となる回転物体の角運動量 J と

$$h = \frac{J}{MC} \tag{4-29}$$

で結ばれている．$r \gg GM/c^2$，$r \gg h$ の領域では Minkowski 時空になる．また，$h \to 0$ では Schwarzschild の外部解になっている．

§4-2　試験体の運動と実験的検証

本書の目的の一つは，同程度の質量をもつ粒子間に働く重力のもとでの多体の運動を記述する力学形式を求めることである．2 体の場合についてのこの形式は次の第 5 章で Newton の次の次のオーダーの近似まで求める．いわゆるポスト-ポスト Newton 近似である．この節では，2 体のうちの 1 体は他の物体には影響を及ぼさない試験体とみなし，この試験体の運動について，Newton 理論とのずれを調べる．

質量 m の試験体の運動は，Minkowski 空間での(1-9)，(1-11)を参照して，次の作用関数から変分方程式により導かれる．

$$I = -mc^2\int d\tau = -mc\int\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}\,d\tau \tag{4-30}$$

ただし

$$d\tau^2 = -\frac{1}{c^2}ds^2 = -\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{4-31}$$

である．τ は固有時で，運動方程式は変分原理

$$\delta I = -mc\int\left[\frac{-1}{2\sqrt{\cdots}}\partial_\mu g_{\lambda\rho}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{-g_{\mu\lambda}\dfrac{dx^\lambda}{d\tau}}{\sqrt{\cdots}}\right)\right]\delta x^\mu d\tau = 0$$

から得られる．

ここで $\sqrt{\cdots}$ は(4-30)の被積分関数であり，(4-31)から c とおかれる．これから

$$g_{\mu\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} + \partial_\lambda g_{\mu\nu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2}\partial_\mu g_{\lambda\rho}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0.$$

書き直して，運動方程式としてよく知られた方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \tag{4-32}$$

が得られる．これは(3-37)の絶対微分で書くと次のようにも書ける．

$$\frac{D}{D\tau}\left(\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\right)=0. \tag{4-32'}$$

さて，Schwarzschild 空間内では(4-32)の添字 μ が 0 の成分は，(4-16)を用いて

$$\frac{d^2t}{d\tau^2}+\frac{r_0}{r^2}\frac{1}{1-\dfrac{r_0}{r}}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}=0 \tag{4-33}$$

となる．この微分方程式はただちに積分できて次式を得る．

$$\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=d,\ (d=\text{定数}). \tag{4-34}$$

われわれは球対称時空を考えているので，試験体の運動は通常の力学における中心力の場合と同様に，一平面内に限られると考えうる．実際，(4-32)の $\mu=2$ の式は

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=0 \tag{4-35}$$

であるから，初期条件として，$\theta=\pi/2$，$d\theta/d\tau=0$ となるような座標系を選べば，試験体は $\theta=\pi/2$ の面(赤道面)の上にあることが確かめられる．以下 $\theta=\pi/2$ とおく．(4-32)の $\mu=3$ の式は

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}+\frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\varphi}{d\tau}=0 \tag{4-36}$$

で，積分定数 h を用いて積分できて

$$r^2\frac{d\varphi}{d\tau}=h \tag{4-37}$$

となり，角運動量保存則(面積速度一定則)を得る．

(4-32)の $\mu=1$ の式の積分は面倒であるが，(4-32)の 4 つの式と(4-31)とは独立ではないので $\mu=1$ の式の代りに(4-31)を用いる．すなわち，

$$-\left(1-\frac{r_0}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2+\frac{1}{c^2}\frac{1}{1-\dfrac{r_0}{r}}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2+\frac{r^2}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2=-1. \tag{4-38}$$

この式に(4-34),(4-37)を代入すると

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2=(d^2-1)c^2+\frac{c^2r_0}{r}-\frac{h^2}{r^2}+\frac{h^2r_0}{r^3} \tag{4-39}$$

となる．これと(4-37)から τ に関する微分を消去すると

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=(d^2-1)\frac{c^2}{h^2}r^4+\frac{c^2r_0}{h^2}r^3-r^2+r_0r \tag{4-40}$$

となる．あるいは，$u=1/r$ とおくと

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2=(d^2-1)\frac{c^2}{h^2}+\frac{c^2r_0}{h^2}u+r_0u^3. \tag{4-41}$$

この式を φ で微分し，$r_0=\dfrac{2GM}{c^2}$ を考慮すると

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{GM}{h^2}+\frac{3GM}{c^2}u^2 \tag{4-42}$$

を得る．右辺第 2 項が一般相対性理論による補正項である．Newton 理論からの類推から

$$u=\frac{1}{r}=\frac{1}{l}\{1+\varepsilon\cos(\eta\varphi)\} \tag{4-43}$$

とおく．Newton 理論のときは，

$$\eta=1\ ;\ l=h^2/GM\ ;\ \varepsilon^2=1+\frac{2E}{h^2}l^2=1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2} \tag{4-44}$$

である．ここで E は試験体の単位質量当たりのエネルギーである．太陽の周りの水星のような場合には(4-42)の右辺第 2 項は小さいので，摂動項とみなし，Newton 近似をとった(4-43)，(4-44)を(4-42)の右辺第 2 項に入れて，(4-43)の中の η を求めると

$$\eta=1-\frac{3G^2M^2}{c^2h^2} \tag{4-45}$$

を得る．

水星が太陽に最も近づくのは，$\cos(\eta\varphi)$ の $\eta\varphi$ が，0，2π，4π，…のときである．一周後にもそうなるためには

$$\delta\varphi=\frac{3G^2M^2}{c^2h^2} \tag{4-46}$$

だけ，2π より多く回らねばならない．これが**水星の近日点移動**と呼ばれ，観測結果ともよく合う．このことについては第 2 章でも述べた．

次に，Schwarzschild の外部解を用いて計算される現象として**太陽の周りの光の**

屈曲がある．光の場合には，固有時は $d\tau=0$ であるから，(4-38)の右辺の -1 は落とすべきである．このことは(4-42)の $h\to\infty$ とすることに対応している．よって，光の経路を定める方程式は次のようになる．

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{3MG}{c^2}u^2. \tag{4-47}$$

右辺を 0 とおいた方程式の解は，$1/b$ を積分定数として

$$u=\frac{1}{b}\cos\varphi. \tag{4-48}$$

これは y 軸に平行な直線である*)．(4-47)の右辺を摂動項と考えて，その中の u として(4-48)を入れると，(4-47)の解として

$$u=\frac{1}{b}\cos\varphi+\varepsilon(2-\cos^2\varphi), \tag{4-49}$$

ただし

$$\varepsilon=\frac{MG}{b^2c^2}. \tag{4-50}$$

図4-1のように，遠方の星から太陽に向って来た光が，太陽重力で曲がり，$\varphi=0$ で太陽表面を通るように座標をえらぶ．

$r\to\infty$，すなわち，$u\to 0$ とした(4-49)の解を求めると

$$\cos\varphi=\frac{1}{b\varepsilon},\quad -2b\varepsilon$$

となるが $\varepsilon\ll 1/b$ と仮定できるので $1/b\varepsilon$ は除かれ

$$\cos\varphi=-2b\varepsilon=-\frac{2MG}{c^2b}.$$

よって

$$\varphi_\pm=\pm\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2MG}{c^2b}\right). \tag{4-51}$$

$R_\odot$ を太陽半径とすると，近似的には

$$b\approx R_\odot \tag{4-52}$$

ととれるから観測者の見る光の屈曲角 δ は

---

*)　b は太陽がない場合の光の軌道の衝突係数である．詳しくは§7-3で述べる．

$$\delta = 2\varDelta\varphi = \frac{4MG}{c^2 R_\odot} \tag{4-53}$$

で与えられる．

Newton 力学でも，光に仮想的に質量を持たせて屈曲角を計算し，後に質量を 0 にすると，上の屈曲角の 1/2 倍が得られる．実験に合致するのは，もちろん，一般相対性理論による(4-53)である．

もう 1 つの古くから有名な検証として，**スペクトル線の赤方偏移**がある．これは，等価原理からも導かれることは第 2 章でも述べたが，Schwarzschild の外部解からも次のようにして求められる．

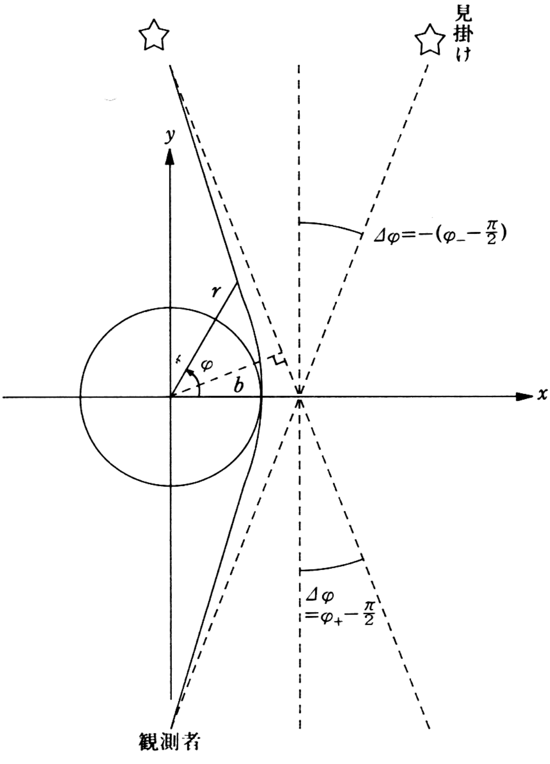


図 4-1

座標時間の進み方 dt と固有時間の進み方 $d\tau$ は $dr=d\theta=d\varphi=0$ のときは

$$d\tau=\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{1/2}dt. \tag{4-54}$$

したがって r_1，r_2 に静止した時計の進み方 $d\tau_1$，$d\tau_2$ は*)

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2}=\left\{\frac{1-\dfrac{2GM}{c^2r_1}}{1-\dfrac{2GM}{c^2r_2}}\right\}^{1/2} \tag{4-55}$$

太陽表面を $r_1=R_\odot$ とし，太陽表面の観測者の測る光の振動数を ν とし，地上に届いた光の振動数を地上の観測者が測ったものを ν' とする．第 2 章において，局所 Lorentz 座標系をとればその点では重力を消すことが可能であるという等価原理を述べた．この原理が宇宙の到る所で時間に無関係に成り立つ(**強い等価原理**という)**)とすると，太陽表面上の光源と同じものを地球表面上におき，その光源から出す光を，光源のそばの観測者が測れば，振動数 ν は同じである．dt の間に出た光の数 n と ν との間には $\nu=n/d\tau$ の関係があること，および $r_2\gg R_\odot=r_1$ を考慮すると(4-55)は

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{1-\frac{2GM_\odot}{c^2R_\odot}}\quad (R_\odot：太陽半径；M_\odot：太陽質量) \tag{4-56}$$

となる．この結果の検証は，1927年に行われ，一致するように見えた．しかし太陽の大気の温度，圧力，対流などとの関係で疑いも持たれていたが，1960年代になり，地球上の実験装置で 1 %の誤差で確かめられた．

以上 3 つの検証は一般相対性理論の成立時代から調べられていた．特に水星の近日点移動については今から70年以上前から観測されていたが，1983年その確かさが一層深められた．光の屈曲についても1976年，1 %の範囲で上の(4-53)と一致することが示された．

---

*)　光の径路が測地線であるという性質を用い，(t_1，r_1)の点から dt_1 の時間に n 個の光が出たとき，(t_2，r_2)でこの n 個の光を受ける時間 dt_2 は dt_1 と等しくなるように座標時間はとられている．

**)　第 2 章の等価原理を弱い等価原理と呼ぶこともある．

この外に，Shapiroにより1964年，電波を水星，金星等に送り，それが反射して帰って来る時間を測ることによって一般相対性理論の検証を行うことが提唱された．電波の信号の速度は c ではなく，等方座標系(4-26)から得られ，

$$\tilde{c} = c\frac{1-\frac{r_0}{4r'}}{\left(1+\frac{r_0}{4r'}\right)^3} \tag{4-57}$$

と，見掛け上 c より小さくなり，帰って来る信号の時刻が遅れる．この遅れを測定し検証を行おうとするものである．1979年に精度が上げられ，0.1%の範囲で(4-57)によって予想される値と一致することが示された．

これ等の検証についての詳しいことは

C.M.Will；Physics Reports **113**（1984），345,

もっと最近では

J.H.Taylor；第11回 GRG（1986年7月）報告（General Relativity and Gravitation, Edited by Mac Callum, Cambridge Univ. Press)

に述べられている．

最後に，一般相対性理論の検証として，1974年に発見されたパルサー PSR 1913＋16，およびそれ以後の連星パルサーによる検証が非常に重要になってきた．これは，上記の3つの検証の他に，重力波に関する検証も含むからである．

PSR 1913＋16の場合，質量がおよそ $1.4\,M_{\odot}$ の2つの中性子星が平均，1,200万kmの距離で，約7時間45分の軌道周期で連星を構成している．水星の近日点移動が100年で43秒であったのに対し，この場合には(4-46)を用いると，1年で4.2度ときわめて大きい．さらに軌道周期の減少率が観測され，第6章で導かれる重力波放出の4重極公式を用いて計算したものに一致する傾向を示した．重力波の存在の証明と同時に，一般相対性理論の決定的とも見なしうる確証と考えられる(上記のTaylorの報告参照)．

§4-3　重力場のエネルギー擬テンソルと慣性中心

物質場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ はそれ自体では保存則を満たさず，重力場のエネルギー擬テンソルと呼ばれる量を加えてはじめて保存則が成り立つ．最初に，Landau-Lifshitz [1]に従って Einstein の重力方程式(4-7)からこれを求め

よう．

Riemann 空間内の一点においては，測地座標系(3-60)をとることによって計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の一階微分を 0 とすることができる．物質場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu}{}_{\nu}$ は $\nabla_\nu T^{\mu\nu}=0$ を満たすが，測地座標系では

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}=0 \tag{4-58}$$

となる．この式を恒等的に満たすように，$T^{\mu\nu}$ の代りに

$$T^{\mu\nu}=-\partial_\lambda \eta^{\mu\lambda\nu}\,;\ \eta^{\mu\nu\lambda}=-\eta^{\mu\lambda\nu} \tag{4-59}$$

により $\eta^{\mu\nu\lambda}$ を導入しよう．(4-59)を満たす $\eta^{\mu\nu\lambda}$ を求めるため，(3-52)より $R^{\mu\nu}$ を

$$R^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g^{\lambda\omega}(\partial_\rho\partial_\lambda g_{\omega\sigma}+\partial_\omega\partial_\sigma g_{\rho\lambda}-\partial_\rho\partial_\sigma g_{\lambda\omega}-\partial_\lambda\partial_\omega g_{\rho\sigma}) \tag{4-60}$$

として Einstein 方程式(4-7)に代入し

$$T^{\mu\nu}=-\partial_\lambda\left[\frac{1}{2k}\frac{1}{(-g)}\partial_\rho\{(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}-g^{\mu\lambda}g^{\rho\nu})\}\right] \tag{4-61}$$

を得る．この [　　] の中は ν，λ について反対称なので，上の $\eta^{\mu\lambda\nu}$ の要求を満たしている．いま，われわれの考えている点では $\partial_\lambda g=0$ であるので $1/(-g)$ を落としたものをとり，

$$h^{\mu\nu\lambda}=\partial_\rho\lambda^{\mu\rho\nu\lambda}, \tag{4-62}$$

$$\lambda^{\mu\rho\nu\lambda}=\frac{1}{2k}(-g)(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}-g^{\mu\lambda}g^{\rho\nu}), \tag{4-63}$$

とおくと，$h^{\mu\nu\lambda}=-h^{\mu\lambda\nu}$ であり，(4-61)は

$$-\partial_\lambda\partial_\rho\lambda^{\mu\rho\nu\lambda}=-\partial_\lambda\partial_\rho\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}=(-g)T^{\mu\nu} \tag{4-64}$$

となる．

ここで注意すべきことは，この関係式は $\partial_\lambda g_{\mu\nu}=0$ になるような特別な座標系においてのみ書けるのであり，一般の座標系では，$-\partial_\lambda h^{\mu\nu\lambda}$ と $(-g)T^{\mu\nu}$ との差として $(-g)t^{\mu\nu}$ を導入すれば

$$(-g)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu})=-\partial_\lambda\partial_\rho\lambda^{\mu\lambda\nu\rho} \tag{4-65}$$

と書かれる．物質場のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は対称テンソルであり，(4-63)から $\partial_\lambda\partial_\rho\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}=\partial_\lambda\partial_\rho\lambda^{\nu\lambda\mu\rho}$ であるから $t^{\mu\nu}$ も対称である．(4-65)の $T^{\mu\nu}$ に Einstein 方程式を用いると $t^{\mu\nu}$ は次のようになる．

$$(-g)t^{\mu\nu}=-\partial_\lambda\partial_\rho\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}-(-g)\frac{1}{k}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right). \tag{4-66}$$

右辺から面倒な計算ののち得られるものが Landau-Lifshitz の**エネルギー擬テンソル***) で $t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{LL}}$ と書くと

$$t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{LL}} = -\frac{1}{2k}\Big\{\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{,\lambda}\tilde{g}^{\lambda\rho}{}_{,\rho} - \tilde{g}^{\mu\lambda}{}_{,\lambda}\tilde{g}^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\tilde{g}^{\lambda\sigma}{}_{,\omega}\tilde{g}^{\rho\omega}{}_{,\sigma}$$

$$-(g^{\mu\lambda}g_{\rho\sigma}\tilde{g}^{\nu\sigma}{}_{,\omega}\tilde{g}^{\rho\omega}{}_{,\lambda} + g^{\nu\lambda}g_{\rho\sigma}\tilde{g}^{\mu\sigma}{}_{,\omega}\tilde{g}^{\rho\omega}{}_{,\lambda})$$

$$+g_{\lambda\rho}g^{\sigma\omega}\tilde{g}^{\mu\lambda}{}_{,\sigma}\tilde{g}^{\nu\rho}{}_{,\omega} + \frac{1}{8}(2g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho})(2g_{\sigma\omega}g_{\tau\eta} - g_{\omega\tau}g_{\sigma\eta})\tilde{g}^{\sigma\eta}{}_{,\lambda}\tilde{g}^{\omega\tau}{}_{,\rho}\Big\},$$

(4-67)

ここで $\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}$ で $\tilde{g}^{\mu\nu}{}_{,\lambda}$ は $\partial_\lambda \tilde{g}^{\mu\nu}$ の略である.

(4-65) より

$$\partial_\nu\{(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{LL}})\} = 0 \tag{4-68}$$

は明らかである.

上の導出からわかるように，重力場のエネルギー擬テンソルを求める方法はユニークではなく任意性がある．たとえば (4-68) の代りに $\partial_\nu(T^{\mu\nu} + \tilde{t}^{\mu\nu}) = 0$ になるように $\tilde{t}^{\mu\nu}$ を求めることもできる．これが Misner，Thorne，Wheeler [2] によるもので $t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{MTW}}$ と書く.

Landau-Lifshitz の場合には $\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$ として (4-63) をとったが，Misner，Thorne，Wheeler に従って $\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$ の代りに，$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ として

$$\tilde{\lambda}^{\mu\lambda\nu\rho} = \frac{1}{2k}(-\eta^{\mu\gamma}\eta^{\nu\delta}\eta^{\lambda\rho} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\gamma}\eta^{\rho\delta} + \eta^{\lambda\gamma}\eta^{\nu\delta}\eta^{\mu\rho} + \eta^{\mu\gamma}\eta^{\rho\delta}\eta^{\lambda\nu})\Big(h_{\gamma\delta} - \frac{1}{2}\eta_{\gamma\delta}\eta^{\omega\tau}h_{\omega\tau}\Big) \tag{4-69}$$

をとると，Einstein 方程式は

$$-\partial_\lambda\partial_\rho\tilde{\lambda}^{\mu\lambda\nu\rho} = (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{MTW}}) \tag{4-70}$$

となる．$\tilde{\lambda}^{\mu\lambda\nu\rho}$ (および $\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$) は Riemann 曲率テンソルの対称性 (3-53), (3-54) と同じ対称性を有するので

$$\partial_\nu(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{MTW}}) = 0 \tag{4-71}$$

が得られる．したがって，μ，ν について対称な

---

*) (4-65) の右辺の $\partial_\lambda\partial_\rho\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$ は，明らかにテンソルの変換性を示さない量であり，擬テンソルと呼ばれる.

$$t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{MTW}} = -\partial_\lambda\partial_\rho\tilde{\lambda}^{\mu\lambda\nu\rho} - \frac{1}{k}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \tag{4-72}$$

の右辺を計量テンソル，およびその微分によって表わしたものが Misner，Thorne，Wheeler のエネルギー擬テンソルである．

上の $t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{LL}}$，$t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{MTW}}$ は μ，ν について対称なので，次式で定義される角運動量

$$M^{\mu\nu}{}_{\mathrm{LL}} = -\frac{1}{c}\int d^3x(-g)\{x^\mu(T^{\nu0}+t^{\nu0}{}_{\mathrm{LL}})-x^\nu(T^{\mu0}+t^{\mu0}{}_{\mathrm{LL}})\}, \tag{4-73}$$

$$M^{\mu\nu}{}_{\mathrm{MTW}} = -\frac{1}{c}\int d^3x\{x^\mu(T^{\nu0}+t^{\nu0}{}_{\mathrm{MTW}})-x^\nu(T^{\mu0}+t^{\mu0}{}_{\mathrm{MTW}})\} \tag{4-74}$$

は保存則を満たす．これらの式は，$\Lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$ として $\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$，$\tilde{\lambda}^{\mu\lambda\nu\rho}$ のいずれかをとるものとすると

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{c}\int(x^\mu\partial_\lambda\Lambda^{\nu\lambda0j}-x^\nu\partial_\lambda\Lambda^{\mu\lambda0j}+\Lambda^{\mu j0\nu}-\Lambda^{\nu j0\mu})dS_j \tag{4-75}$$

$$(dS_1 = dx^2dx^3,\ dS_2 = dx^3dx^1,\ dS_3 = dx^1dx^2)$$

と書き表わされる．したがって $r\to\infty$ での $\Lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$ の振舞いが同じであれば，$M^{\mu\nu}$ は $\lambda^{\mu\lambda\nu\rho}$ でも $\tilde{\lambda}^{\mu\lambda\nu\rho}$ でも同じ値を持つ．

$M^{\mu0}$ の保存則

$$x^0\int(T^{i0}+t^{i0}{}_{\mathrm{LL}})(-g)d^3x-\int x^i(T^{00}+t^{00}{}_{\mathrm{LL}})(-g)d^3x = \mathrm{const}. \tag{4-76}$$

から慣性中心として

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{LL}} = \frac{\int \boldsymbol{x}(T^{00}+t^{00}{}_{\mathrm{LL}})(-g)d^3x}{\int(T^{00}+t^{00}{}_{\mathrm{LL}})(-g)d^3x} \tag{4-77}$$

が Landau-Lifshitz の重力場のエネルギー擬テンソルを用いて得られる．同様に，Misner，Thorne，Wheeler の擬テンソルから

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{MTW}} = \frac{\int \boldsymbol{x}(T^{00}+t^{00}{}_{\mathrm{MTW}})d^3x}{\int(T^{00}+t^{00}{}_{\mathrm{MTW}})d^3x} \tag{4-78}$$

が得られる．

重力場のエネルギー擬テンソルとして，上記のほかにも，Einstein や，Møller

の定義があるが，これらの $t^{\mu\nu}$ は μ，ν について対称でなく，角運動量保存則を満たさないので，慣性中心を求めるには適していない．ここでは，これらについてはふれないことにする．なお $t^{\mu\nu}{}_{\rm LL}$ は対称で，かつ計量テンソルの 1 次微分のみ含むものとしては，唯一の擬テンソルである．

第5章　場の方程式の逐次解

§5-1　c^{-1} 展開による逐次近似

一般相対論においては，重力によって相互作用している多体系に対する静的または定常的厳密解は存在しない*)．物体は複雑な運動をするので，状況に応じた何らかの近似的手法を用いてその運動を解析しなければならない．一般相対論は弱い重力の極限で Newton の重力理論と一致するので，1つの近似法として Newton の重力定数Gによるべき展開が考えられる．ところがこの方法では第1近似は重力相互作用のない運動を与え，第2近似にはオーダーGの万有引力の他に，速度に依存した Gv^2，Gv^4 等の力が現われ，正確な Newton 理論に対応しない．一方，Newton の重力の法則にしたがって相互作用する多粒子系の運動の長時間平均に関する考察（ビリアル定理）をもとに，無次元量の関係式

$$\frac{1}{M}\left\langle\sum_a m_a\frac{v_a{}^2}{c^2}\right\rangle=\frac{1}{2M}\left\langle\sum_{a,b}\frac{Gm_am_b}{c^2r_{ab}}\right\rangle \tag{5-1}$$

が導かれる．ここでは運動は位相空間の有限領域にとどまるものとし，Mは系の代表的質量を表わす．この関係式は逐次近似の微小パラメータとして，Gではなく，光速度の逆数 c^{-1} を採るべきことを示唆する．c^{-1} 展開では，第1近似は $c\to\infty$ の極限に対応し**遠隔作用**そのものを表わすので Newton 理論となることは明らかである．この近似法は重力場が弱く，かつ物体の速度が光速度に較べて小さい場合に有効な方法である．

本章では質点系の運動をいわゆる Einstein-Infeld-Hoffmann のポスト－Newton

---

*）負の質量の導入や，電荷を持たせることにより，多体系の静的厳密解を求める試みがある．

近似よりもさらに高い近似（**ポスト-ポスト-Newton 近似***)）まで考える[1]．そのため，最初に質点系に対する重力場の方程式（4-7）の c^{-1} 展開による解法を説明し，計量テンソルを c^{-6} 次まで求める．次いで系の運動を記述する Lagrange 関数を Fokker 作用の方法により求め，最後に 2 体系の Hamilton 関数をスピン-軌道，スピン-スピン相互作用まで含めて与える．

すでに一般論のところで述べたように，一般座標変換に対する共変性のために，Einstein 方程式の解は 4 個の任意関数を含む．したがって解を定めるためには**座標条件**と呼ばれる 4 個の条件を課し，この任意関数を決めなければならない．さてどのような座標条件を課すべきであろうか．座標条件には何か規範があるのだろうか．

Einstein 理論は一般相対性原理に基礎を置いているので，物理現象を記述する基準として原理的にはどのような座標系を選んでも良いはずである．そして座標条件も任意のものを採用できそうに思われる．けれども，座標系の選択についての議論は観測の問題に深くかかわっている．たとえば，水星の運動についてわれわれが地球上で得た観測データを理論の結果と較べようとするとき，どのような座標系で解いた解と較べるべきであろうか．現実に，地球は水星および太陽から十分遠方で，その重力の影響がかなり小さい場所にある．そして空間的無限遠方では時空は平坦になることが想定される．考えてみれば，天体の運動の解析の場合に限らず，物理学で使われる諸概念は平坦時空で定義され，そこで自由に使うことのできるものであった．そこでわれわれは，一般相対論においても，空間的無限遠方で計量が Minkowski 型となる座標系を**物理的に容認される座標系**とする．もちろん，定められた源に対してこの条件を満たす座標系は無数にありうるが，それらは座標変換

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}(x), \quad \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \partial_{\mu} a^{\nu}(x) = 0 \tag{5-2}$$

によって相互に関連づけられる．この物理的に容認される座標系においては空間的無限遠方の平坦空間に平面を用意し，各事象点から発射され平面に垂直に到達する光によって，物体の運動の軌道の像をこの平面上に定めることができる．原理的には，観測データ，理論の結果とも，この無限遠方の平面上に射影した値によって比

---

*) 第 2 -ポスト-Newton 近似ともいう．以後簡単のために，本書ではポスト-Newton 近似とポスト-ポスト-Newton 近似をそれぞれ pN 近似，ppN 近似と書くことにする．記号 ppN はいわゆる parametrized-post-Newton 近似のことではない．

較するのである．

また，空間的無限遠方で発散する計量の場合には，系の運動を記述するLagrange関数を定めることができないことは次節で示される．

さて質点系に対する重力場の方程式を解くために (4-7) を

$$R_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}\left(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\right)T^{\rho\sigma} \tag{5-3}$$

と書き直す．ここで質点系のエネルギー・運動量テンソル $T^{\rho\sigma}$ は

$$T^{\rho\sigma}=-\sum_a\frac{m_a}{\sqrt{-g}}\frac{dx^\rho}{dt}\frac{dx^\sigma}{dt}\frac{dt}{d\tau}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a(t)) \tag{5-4}$$

$$(d\tau=c^{-1}\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu})$$

で与えられる．次に，共変計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}\quad(\eta_{00}=-1,\ \eta_{0i}=0,\ \eta_{ij}=\delta_{ij}) \tag{5-5}$$

と置き，反変テンソル $g^{\mu\nu}$，Christoffel シンボル $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ および $\sqrt{-g}$ を $h_{\mu\nu}$ で表示する．$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}=\delta^\mu{}_\nu$ と (5-5) より

$$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\eta^{\rho\nu}h_{\lambda\rho}$$

となり，反復法を適用することにより

$$g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}-\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}+\eta^{\mu\alpha}\eta^{\lambda\beta}\eta^{\nu\rho}h_{\alpha\beta}h_{\lambda\rho}$$
$$-\eta^{\mu\alpha}\eta^{\lambda\beta}\eta^{\rho\gamma}\eta^{\nu\sigma}h_{\alpha\beta}h_{\lambda\rho}h_{\gamma\sigma}+O(h^4) \tag{5-6}$$

を得る．ここで $\eta^{\mu\nu}$ は

$$\eta^{00}=-1,\ \eta^{0i}=0,\ \eta^{ij}=\delta^{ij}$$

によって定義される Minkowski 空間の計量テンソルである．これから先，添字の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$，$\eta^{\mu\nu}$ によって行うことにする．$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ および $\sqrt{-g}$ の $h_{\mu\nu}$ による展開形は (5-5) と (5-6) より

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\rho\nu}+\partial_\nu h_{\mu\rho}-\partial_\rho h_{\nu\mu})-\frac{1}{2}h^{\lambda\rho}(\partial_\mu h_{\rho\nu}+\partial_\nu h_{\mu\rho}-\partial_\rho h_{\nu\mu})$$

$$+\frac{1}{2}h^{\lambda\sigma}h^\rho{}_\sigma(\partial_\mu h_{\rho\nu}+\partial_\nu h_{\mu\rho}-\partial_\rho h_{\nu\mu})+O(h^4) \tag{5-7}$$

$$\sqrt{-g}=1+\frac{1}{2}h^\alpha{}_\alpha+\frac{1}{8}(h^\alpha{}_\alpha h^\beta{}_\beta-2h^\beta{}_\alpha h^\alpha{}_\beta)+O(h^3) \tag{5-8}$$

となる．(5-7) によって Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ の $h_{\mu\nu}$ による展開形が得られるが，その結果は付録 A-1 に与えてある．

方程式 (5-3) の逐次解を求める準備として，(5-3) の混合成分と空間成分の一般的構造を調べておく．(A1-2) と (A1-3) から，h_{0i} および h_{ij} に対する微分方程式は，それぞれ，次の形になる：

$$\Lambda_{ij}(\partial)h_{0j} = F_i \text{ *)} \tag{5-9}$$

$$\Lambda_{ik:jl}(\partial)h_{kl} = F_{ij}. \tag{5-10}$$

ここで微分演算子 Λ_{ij}，$\Lambda_{ik:jl}$ は

$$\Lambda_{ij}(\partial) = \triangle\delta_{ij} - \partial_i\partial_j \tag{5-11}$$

$$\Lambda_{ik:jl}(\partial) = \triangle\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{kl}\partial_i\partial_j - \delta_{jl}\partial_i\partial_k - \delta_{ik}\partial_j\partial_l \tag{5-12}$$

である．Λ_{ij} と $\Lambda_{ik:jl}$ の性質から，方程式 (5-9)および(5-10)の可積分条件として

$$\partial_i F_i = 0 \tag{5-13}$$

$$\frac{1}{2}\triangle F_{ii} = \partial_i\partial_j F_{ij} \tag{5-14}$$

が導かれる．さらに斉次方程式

$$\Lambda_{ij}h_{0j} = 0, \quad \Lambda_{ik:jl}h_{kl} = 0$$

の解は，h_{0i} に対して $\partial_i I$，h_{ij} に対して $\partial_i J_j + \partial_j J_i$ の関数形となることがわかる．この 4 個の任意関数 I，J_i が先に述べた座標条件によって定められるものである．

質点系の運動については，Einstein と Infeld および Hoffmann との共同研究以後，Fock, Papapetrou，そして Landau-Lifshitz などによって種々の座標条件のもとで pN 近似で考察されている．これらの座標条件は pN 近似では無限遠点で平坦となる計量テンソルを与え，同一の運動方程式を導くが，高次近似まで物理的に容認される解を与えるかどうかは解いてみなければわからない．実際，たとえば Lorentz 変換に対して共変な形の **de Donder の座標条件**

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}) = 0 \tag{5-15}$$

は ppN 近似では多体系に対して無限遠方で発散する計量テンソルを与える．それで，ここでは座標条件を最初に決めずに一般解を求める方法をとり，どのような座標条件が妥当であるか調べることにしよう．

逐次近似解を求めるために，(5-3) に含まれるすべての関数を光速度の逆べきで展開する．(5-3) の右辺の最低次は c^{-2} 次なので，$h_{\mu\nu}$ は

---

*) 本章では 3 次元空間で考えるので，空間座標の添字については上ツキ，下ツキを区別せずに同じ添字について和をとる．

$$h_{\mu\nu}=h^{(2)}_{\mu\nu}+h^{(3)}_{\mu\nu}+h^{(4)}_{\mu\nu}+\cdots \tag{5-16}$$

と展開される*)．ここで右上の括弧内の数は c^{-1} の次数を表わす．付録 A-2 に方程式 (5-3) の右辺の $h^{(n)}_{\mu\nu}$ による展開形を与えておく．また時間座標 $x^0=ct$ による微分は c^{-1} の次数を 1 つ上げることに注意しなければならない．

最低次の方程式は

$$\triangle h^{(2)}_{00}=-8\pi Gc^{-2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a) \tag{5-17}$$

$$\Lambda_{ij}(\partial)h^{(2)}_{0j}=0 \tag{5-18}$$

$$\Lambda_{ik:jl}(\partial)h^{(2)}_{kl}=h^{(2)}_{00,ij}-8\pi Gc^{-2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\delta_{ij} \tag{5-19}$$

である．(5-19) の右辺は (5-14) を満たしている．これらの方程式の，無限遠方で零となる一般解は

$$h^{(2)}_{00}=\frac{2G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a} \tag{5-20}$$

$$h^{(2)}_{0i}=\partial_i I^{(2)} \tag{5-21}$$

$$h^{(2)}_{ij}=\delta_{ij}\frac{2G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a}+\partial_i J^{(2)}_j+\partial_j J^{(2)}_i \tag{5-22}$$

で与えられる．ここで $I^{(2)}$ と $J^{(2)}_i$ は c^{-2} 次の関数である．質点系の場合には，任意関数 I，J_i を具体的に考えるとき，次元の考察に加えて以下の 4 つの物理的要請が課せられる．

関数 I，J_i は

(i)　$G\to 0$，$\boldsymbol{v}_a\to 0$ の極限で有限である

(ii)　座標に関しては，相対座標 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a$ と $\boldsymbol{z}_a-\boldsymbol{z}_b$ にのみ依存する

(iii)　$\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{z}_b$，$\cdots\boldsymbol{z}_n$ に依存する場合には，同時に m_a，m_b，$\cdots m_n$ に依存する

(iv)　すべての粒子の寄与を同等に含む．

---

*)　形式的には $h^{(1)}_{\mu\nu}$ から展開してもよいが，解 $h^{(1)}_{00}=0$，$h^{(1)}_{0i}=\partial_i I^{(1)}$，$h^{(1)}_{ij}=\partial_i J^{(1)}_j+\partial_j J^{(1)}_i$ について，後に述べる物理的要請(i)～(iv)を満たす関数 $I^{(1)}$，$J^{(1)}_i$ は c^{-1} 次では存在しない．

この要請によって c^{-2} 次の $I^{(2)}$ と $J_i^{(2)}$ の関数形は

$$I^{(2)} = y_1 G c^{-2} \sum_a m_a \ln r_a \tag{5-23}$$

$$J_i^{(2)} = \frac{1}{2} y G c^{-2} \sum_a m_a n_a{}^i = \partial_i \left(\frac{1}{2} y G c^{-2} \sum_a m_a r_a \right) \tag{5-24}$$

と決まってしまう．ここで y_1 と y は任意の数因子である．

c^{-3} 次の方程式は

$$\triangle h_{00}^{(3)} = 2 h_{0i,0i}^{(2)} \tag{5-25}$$

$$\Lambda_{ij}(\partial) h_{0j}^{(3)} = h_{ij,0j}^{(2)} - h_{jj,0i}^{(2)} + 16\pi G c^{-3} \sum_a m_a \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_a) v_a{}^i \tag{5-26}$$

$$\Lambda_{ik:jl}(\partial) h_{kl}^{(3)} = h_{00,ij}^{(3)} - h_{0i,0j}^{(2)} - h_{0j,0i}^{(2)} \tag{5-27}$$

である．(5-25) の解は

$$h_{00}^{(3)} = 2 \partial_0 I^{(2)} \tag{5-28}$$

となる．(5-26) と (5-27) の右辺に $h_{0i}^{(2)}$，$h_{ij}^{(2)}$ および $h_{00}^{(3)}$ の解を代入すると

$$\Lambda_{ij}(\partial) h_{0j}^{(3)} = \Lambda_{ij}(\partial) \left(-\frac{4G}{c^3} \sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a{}^j \right) \tag{5-29}$$

$$\Lambda_{ik:jl}(\partial) h_{kl}^{(3)} = 0 \tag{5-30}$$

となる．(5-29) の右辺は可積分条件 (5-13) を満たしている．

一般解は

$$h_{0i}^{(3)} = -\frac{4G}{c^3} \sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a{}^i + \partial_i I^{(3)} \tag{5-31}$$

$$h_{ij}^{(3)} = \partial_i J_j^{(3)} + \partial_j J_i^{(3)} \tag{5-32}$$

で与えられるが，物理的要請(i)～(iv)から $I^{(3)}$，$J_i^{(3)}$ は

$$\begin{aligned} I^{(3)} &= y_2 G c^{-3} \sum_a m_a (\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a) \\ J_i^{(3)} &= y_3 G c^{-3} \sum_a m_a n_a{}^i (\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a) + y_4 G c^{-3} \sum_a m_a v_a{}^i \ln r_a \end{aligned} \tag{5-33}$$

となる．ここで再び y_2，y_3，y_4 は数因子である．

次に $h_{00}^{(4)}$ を考えよう．方程式は

$$\triangle h_{00}^{(4)} = -h_{ii,00}^{(2)} + 2 h_{0i,0i}^{(3)} + h_{00,j}^{(2)} h_{ij,i}^{(2)} + h_{00,ij}^{(2)} h_{ij}^{(2)}$$

$$-\frac{1}{2}h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{00,i}-\frac{1}{2}h^{(2)}_{00,j}h^{(2)}_{ii,j}$$

$$+\frac{1}{2}(h^{(2)}_{0i,j}-h^{(2)}_{0j,i})(h^{(2)}_{0i,j}-h^{(2)}_{0j,i})$$

$$+4\pi Gc^{-2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\left(2h^{(2)}_{00}+h^{(2)}_{ii}-3\frac{\boldsymbol{v}_a{}^2}{c^2}\right) \tag{5-34}$$

である．$h^{(2)}_{00}$，$h^{(2)}_{0i}$，$h^{(2)}_{ij}$ および $h^{(3)}_{0i}$ の解を代入し整理すると

$$\triangle h^{(4)}_{00}=(1-y-2y_2)\phi_{,00}+\left(2+\frac{1}{2}y\right)\phi\cdot\triangle\phi-\frac{1}{2}\triangle(\phi^2)$$

$$+\frac{1}{2}y\triangle(\phi_{,i}\chi_{,i})-\frac{1}{2}y\partial_i\{(\triangle\phi)\chi_{,i}\}$$

$$+\frac{4\pi G}{c^2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\left\{(5+y)\phi-3\frac{\boldsymbol{v}_a{}^2}{c^2}\right\} \tag{5-35}$$

となる．ここで

$$\phi=\frac{2G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a},\quad \chi=\frac{G}{c^2}\sum_a m_a r_a \tag{5-36}$$

である．方程式（5-35）を解く際には，理論物理学上の古くかつ新しい問題——自己エネルギー——に直面する．すなわち（5-35）の右辺の $\phi\triangle\phi$ あるいは $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\phi$ 項から生じる $h^{(4)}_{00}$ への寄与

$$\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}$$

には $b=a$ の場合に発散する自己エネルギー m_a/r_{aa} が含まれている．これは基本的には質量および結合定数についてのくりこみの問題であるが，正しくは場の量子論で扱われるべき事柄である．しかしここでは Landau-Lifshitz 流に古典論においてもくりこみの処方が成り立つものとし，計算が終了した時点では発散項はすべてくりこまれたものとし落とすことにする．われわれは経験的にこのような処方によって正しい答が得られることを知っている．数学的には，通常の Dirac の δ 関数の代りに

$$\int d^3x\frac{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a|^p}=0,\quad (p=1,2,\cdots k) \tag{5-37}$$

の性質を有する **Infeld の δ 関数**を用いて計算する．これについては文献[2]を参

照されたい．今後は一貫してこのような発散項の処理を行う．

そうすると，(5-35)の解は

$$h^{(4)}_{00}=(1-y-2y_2)Gc^{-2}\sum_a m_a(r_a)_{,00}$$
$$-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}+\frac{3G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2$$
$$-y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\qquad(5\text{-}38)$$

となる．ここで $(r_a)_{,00}$ は $\boldsymbol{\alpha}_a$ を粒子の加速度として

$$(r_a)_{,00}=-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_a)+\frac{1}{c^2r_a}\{\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}\qquad(5\text{-}39)$$

と表わされる．

pN 近似は，計量テンソルについていえば c^{-4} 次までの展開である．$h^{(4)}_{0i}$ に対する方程式は

$$\Lambda_{ij}(\partial)h^{(4)}_{0j}=h^{(3)}_{ij,0j}-h^{(3)}_{jj,0i}+h^{(2)}_{0j}h^{(2)}_{00,ij}+h^{(2)}_{jk}(h^{(2)}_{0i,jk}-h^{(2)}_{0j,ik})$$
$$-\frac{1}{2}(h^{(2)}_{0j,i}-h^{(2)}_{0i,j})(2h^{(2)}_{jk,k}-h^{(2)}_{kk,j})$$
$$-\frac{1}{2}h^{(2)}_{00,j}(h^{(2)}_{0i,j}+h^{(2)}_{0j,i})+h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{0j,j}$$
$$-\frac{1}{2}(h^{(2)}_{0j,k}-h^{(2)}_{0k,j})(h^{(2)}_{ik,j}+h^{(2)}_{jk,i}-h^{(2)}_{ij,k})$$
$$+16\pi Gc^{-2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\frac{1}{2}h^{(2)}_{0i}\qquad(5\text{-}40)$$

である．既知の解を代入し，整理すると

$$\Lambda_{ij}(\partial)h^{(4)}_{0j}=\Lambda_{ij}(\partial)(\partial_0J^{(3)}_j)+\partial_j\{\phi_{,i}\partial_jI^{(2)}-\phi_{,j}\partial_iI^{(2)}\}$$

となる．右辺は可積分条件を満たしており，解は

$$h^{(4)}_{0i}=\partial_0J^{(3)}_i+\frac{1}{2}(\phi_{,i}I^{(2)}-\phi\partial_iI^{(2)})+\partial_iI^{(4)}\qquad(5\text{-}41)$$

で与えられる．ここで $I^{(4)}$ は物理的要請(ｉ)～(iv)を満たす c^{-4} 次の任意関数である．

$h^{(4)}_{ij}$ に対する方程式は

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{ik:jl}(\partial)h^{(4)}_{kl}\\
&\quad= h^{(2)}_{ij,00}+h^{(4)}_{00,ij}-h^{(3)}_{0i,0j}-h^{(3)}_{0j,0i}+\frac{1}{2}(h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{00,j}+h^{(2)}_{kl,i}h^{(2)}_{kl,j})\\
&\qquad-\frac{1}{2}(h^{(2)}_{ik,j}+h^{(2)}_{jk,i}-h^{(2)}_{ij,k})(h^{(2)}_{00,k}+2h^{(2)}_{kl,l}-h^{(2)}_{ll,k})\\
&\qquad-h^{(2)}_{ik,l}(h^{(2)}_{jl,k}-h^{(2)}_{jk,l})+h^{(2)}_{00}h^{(2)}_{00,ij}\\
&\qquad+h^{(2)}_{kl}(h^{(2)}_{kl,ij}-h^{(2)}_{ik,jl}-h^{(2)}_{jk,il}+h^{(2)}_{ij,kl})\\
&\qquad-2h^{(2)}_{0k,i}h^{(2)}_{0k,j}-h^{(2)}_{0k}(2h^{(2)}_{0k,ij}-h^{(2)}_{0i,jk}-h^{(2)}_{0j,ik})+h^{(2)}_{0k,k}(h^{(2)}_{0i,j}+h^{(2)}_{0j,i})\\
&\qquad+\frac{1}{2}(h^{(2)}_{0i,k}+h^{(2)}_{0k,i})(h^{(2)}_{0k,j}-h^{(2)}_{0j,k})\\
&\qquad+\frac{1}{2}(h^{(2)}_{0k,i}-h^{(2)}_{0i,k})(h^{(2)}_{0j,k}+h^{(2)}_{0k,j})\\
&\qquad+4\pi Gc^{-2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-z_a)(-2h^{(2)}_{ij}+\delta_{ij}h^{(2)}_{kk}+\delta_{ij}c^{-2}\boldsymbol{v}_a{}^2-4c^{-2}v_a{}^iv_a{}^j)
\end{aligned}
\tag{5-42}
$$

である．既知の解を代入し，煩雑な長い計算の後，整理すると

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_{ik:jl}(\partial)h^{(4)}_{kl}\\
&\quad=(\triangle\delta_{ij}+\partial_i\partial_j)\Bigg[\frac{G}{c^2}\sum_a m_a(r_a)_{,00}+\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}\\
&\qquad-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}-\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\Bigg]\\
&\qquad+\Lambda_{ik:jl}(\partial)\Bigg[\frac{4G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}v_a{}^kv_a{}^l-\frac{4G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^k\partial z_b{}^l}\ln(r_a+r_b+r_{ab})\\
&\qquad+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_a{}^2}\{n_a{}^kn_b{}^l+n_a{}^ln_b{}^k-\delta_{kl}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}\\
&\qquad+y^2\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}\{\delta_{kl}-n_a{}^kn_a{}^l-n_b{}^kn_b{}^l+n_a{}^kn_b{}^l(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}\Bigg]\\
&\qquad+2\{\triangle I^{(2)}\cdot\partial_i\partial_jI^{(2)}-\partial_i\partial_kI^{(2)}\cdot\partial_j\partial_kI^{(2)}\}+\frac{4G}{c^4}\sum_a m_a\left(\frac{1}{r_a}\right)_{,i}\left(\alpha_a{}^j+G\sum_{b\neq a}m_b\frac{n_{ab}{}^j}{r_{ab}{}^2}\right)\\
&\qquad+\frac{4G}{c^4}\sum_a m_a\left(\frac{1}{r_a}\right)_{,j}\left(\alpha_a{}^i+G\sum_{b\neq a}m_b\frac{n_{ab}{}^i}{r_{ab}{}^2}\right)
\end{aligned}
\tag{5-43}
$$

を得る．ここに現われた対数項 $m_a m_b(\partial^2/\partial z_a{}^k \partial z_b{}^l)\ln(r_a+r_b+r_{ab})$ は（5-42）の右辺の $h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{00,j}$ からの寄与であるが，この導出については付録 A-3 で解説する．

(5-43) の右辺を可積分条件（5-14）に代入すると

$$\frac{4G}{c^4}\sum_a m_a\left(\triangle\partial_i\frac{1}{r_a}\right)\cdot\left(\alpha_a{}^i+G\sum_{b\neq a}m_b\frac{n_{ab}{}^i}{r_{ab}{}^2}\right)=0$$

となり，Newton 近似の運動方程式

$$\alpha_a{}^i=-G\sum_{b\neq a}m_b\frac{n_{ab}{}^i}{r_{ab}{}^2} \tag{5-44}$$

が要請される．すなわち $h^{(4)}_{ij}$ に対する方程式が解を有するためには Newton 近似の運動方程式が成り立たねばならない．

これは一般的には次のような事情による．重力場の方程式（4-7）の左辺について Bianchi の恒等式（3-63）が成り立つことにより，右辺のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}=0 \tag{5-45}$$

を満たさなければならない．粒子の運動方程式が与えられていれば（5-45）は恒等式であるが，ここで考えているように場の方程式からスタートする，あるいは Einstein 自身が試みたようにすべてが重力場の方程式から導かれるとする場合には，(5-45) は運動方程式を導く．可積分条件は（5-45）と等価である．具体的には，重力場の方程式を pN 近似で解くときには Newton 近似の運動方程式，ppN 近似で解くときには pN 近似の運動方程式が可積分条件を通して要請されることになる．

そうすると，(5-43) の解は

$$\begin{aligned}
h^{(4)}_{ij}=\delta_{ij}\Bigg\{&\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\\
&-\frac{G}{c^4}\sum_a m_a(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_a)-\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\\
&+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\Bigg\}+\frac{4G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}v_a{}^i v_a{}^j\\
&-\frac{4G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}\ln(r_a+r_b+r_{ab})\\
&+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\{n_a{}^i n_b{}^j+n_a{}^j n_b{}^i-\delta_{ij}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}
\end{aligned}$$

$$+y^2\frac{G^2}{4C^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}\{\delta_{ij}-n_a{}^in_a{}^j-n_b{}^in_b{}^j+n_a{}^in_b{}^j(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}$$

$$-\partial_iI^{(2)}\cdot\partial_jI^{(2)}+\partial_iJ_j^{(4)}+\partial_jJ_i^{(4)} \tag{5-46}$$

となる．ここで c^{-4} 次の関数 $J_i^{(4)}$ について物理的要請(i)〜(iv)を満たすものとして種々の関数形が可能であるが，まだ決めないでおく．

$h_{00}^{(4)}$ および $h_{ij}^{(4)}$ の解（5-38）と（5-46）には加速度項 $Gc^{-4}\sum_a m_a(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_a)$ が含まれている．この項は一見すると空間的無限遠方での条件 $h_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}$ を満足していないように思えるが，Newton 近似の運動方程式（5-44）によって

$$\frac{G}{C^4}\sum_a m_a(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_a)=-\frac{G}{C^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})$$

$$=-\frac{G}{C^4}\sum\nolimits_{(a,b)}\frac{m_am_b}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_a-\boldsymbol{n}_b)\cdot\boldsymbol{n}_{ab} \tag{5-47}$$

となり

$$(\boldsymbol{n}_a-\boldsymbol{n}_b)\xrightarrow[r\to\infty]{}O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{5-48}$$

なので必要な条件を満たしていることがわかる．（5-47）で $\sum_{(a,b)}$ は異なる対 (a, b) についての和を表わしている．

以上で pN 近似の計量テンソルの一般解が求められた．次節でこの一般解を用いて pN 近似の Lagrange 関数を計算するが，その結果として $I^{(2)}$ および $J_i^{(3)}$ すなわち $h_{0i}^{(2)}$ および $h_{ij}^{(3)}$ の寄与はそれぞれ完全に打消し合い，pN 近似までの Lagrange 関数にはまったく効かないことがわかる．そこで，さらに高次の計算をするに当って簡略化のため

$$h_{0i}^{(2)}=h_{ij}^{(3)}=0 \tag{5-49}$$

ととることにする．$I^{(2)}$ と $J_i^{(3)}$ は斉次方程式の解として与えられる関数なので，条件（5-49）を満足するような座標条件を常に選ぶことができる．

次に，条件（5-49）の下で ppN 近似の Lagrange 関数を計算すると，$h_{0i}^{(4)}$，$h_{00}^{(5)}$，$h_{ij}^{(5)}$ および $h_{0i}^{(6)}$ はまったく寄与しないことがわかる．そこで ppN 次の Lagrange 関数を求めるさいには

$$h_{0i}^{(4)}=h_{00}^{(5)}=h_{ij}^{(5)}=h_{0i}^{(6)}=0 \tag{5-50}$$

としてよい．

さて，上の条件（5-49）と（5-50）の下でppN近似の計量テンソルを求めよう．$h_{0i}^{(5)}$ に対する方程式は

$$\Lambda_{ij}(\partial)h_{0j}^{(5)} = h_{ij,0j}^{(4)} - h_{jj,0i}^{(4)} + h_{jk,0}^{(2)}h_{jk,i}^{(2)}$$

$$+\frac{1}{2}(h_{ik,0}^{(2)} + h_{0k,i}^{(3)} - h_{0i,k}^{(3)})(h_{jj,k}^{(2)} - 2h_{jk,j}^{(2)})$$

$$-\frac{1}{2}h_{00,i}^{(2)}(h_{jj,0}^{(2)} - 2h_{0j,j}^{(3)}) - \frac{1}{2}h_{00,j}^{(2)}(h_{0i,j}^{(3)} + h_{0j,i}^{(3)} - h_{ij,0}^{(2)})$$

$$-\frac{1}{2}(h_{ik,j}^{(2)} + h_{jk,i}^{(2)} - h_{ij,k}^{(2)})(h_{kj,0}^{(2)} + h_{0j,k}^{(3)} - h_{0k,j}^{(3)})$$

$$+h_{jk}^{(2)}(h_{jk,0i}^{(2)} - h_{ij,0k}^{(2)} - h_{0j,ik}^{(3)} + h_{0i,jk}^{(3)}) + h_{0j}^{(3)}h_{00,ij}^{(2)}$$

$$+8\pi Gc^{-2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\left(h_{0i}^{(3)} + 2\frac{v_a{}^j}{c}h_{ij}^{(2)} - \frac{v_a{}^i}{c}h_{jj}^{(2)} + \frac{v_a{}^2 v_a{}^i}{c^3}\right) \tag{5-51}$$

である．既知の解を代入し整理すると，(5-51）の右辺は可積分条件（5-13）を満足していることがわかる．そして一般解は

$$h_{0i}^{(5)} = X_{0i}^{(5)} + (1-y-2y_2)\frac{G^2}{2c^5}\sum_a\sum_b m_a m_b\left\{\frac{n_a{}^i(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)}{r_a{}^2}\right.$$

$$\left.+\frac{v_a{}^i - n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)}{r_a r_b}\right\} - \frac{2G}{c^3}\sum_a m_a(r_a v_a{}^i)_{,00}$$

$$+\partial_0 J_i^{(4)} + \partial_i I^{(5)} \tag{5-52}$$

で与えられる．ここで $X_{0i}^{(5)}$ の具体的表示は付録A-4に与えてあるが，これは空間的無限遠点での条件 $X_{0i}^{(5)} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$ を満たしている．

$h_{00}^{(6)}$ に対する方程式は

$$\triangle h_{00}^{(6)} = 2h_{0i,0i}^{(5)} - h_{ii,00}^{(4)} + h_{00,i}^{(2)}\left(h_{ij,j}^{(4)} - h_{00,i}^{(4)} - \frac{1}{2}h_{jj,i}^{(4)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}h_{00,i}^{(4)}(2h_{ij,j}^{(2)} - h_{jj,i}^{(2)}) + h_{00,ij}^{(2)}h_{ij}^{(4)} + h_{ij}^{(2)}h_{00,ij}^{(4)}$$

$$+\frac{1}{2}(h^{(3)}_{0i,j}-h^{(3)}_{0j,i})(h^{(3)}_{0i,j}-h^{(3)}_{0j,i})+\frac{1}{2}h^{(2)}_{00,0}(2h^{(3)}_{0i,i}-h^{(2)}_{ii,0})$$

$$+\frac{1}{2}h^{(2)}_{ij,0}h^{(2)}_{ij,0}+(h^{(2)}_{ii,j}-2h^{(2)}_{ij,i})h^{(3)}_{0j,0}+h^{(2)}_{ij}(h^{(2)}_{ij,00}-2h^{(3)}_{0i,0j})$$

$$-h^{(2)}_{ik}h^{(2)}_{jk}h^{(2)}_{00,ij}-(h^{(2)}_{ik}h^{(2)}_{jk})_{,i}h^{(2)}_{00,j}-\frac{1}{2}h^{(2)}_{00}h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{00,i}$$

$$+\frac{1}{2}h^{(2)}_{ij}h^{(2)}_{00,j}(h^{(2)}_{00,i}+h^{(2)}_{kk,j})+\frac{1}{2}h^{(2)}_{kl}h^{(2)}_{kl,i}h^{(2)}_{00,i}$$

$$+4\pi Gc^{-2}\sum_a m_a\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\Big\{2h^{(4)}_{00}+h^{(4)}_{ii}+2\frac{v_a{}^i}{c}h^{(3)}_{0i}-h^{(2)}_{00}h^{(2)}_{ii}$$

$$-\frac{1}{4}h^{(2)}_{ii}h^{(2)}_{jj}-\frac{1}{2}h^{(2)}_{ij}h^{(2)}_{ij}-3\frac{v_a{}^iv_a{}^j}{c^2}h^{(2)}_{ij}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\boldsymbol{v}_a{}^2}{c^2}h^{(2)}_{ii}-\frac{7}{4}\frac{(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2}{c^4}\Big\} \tag{5-53}$$

であり，この方程式の一般解は

$$h^{(6)}_{00}=X^{(6)}_{00}-\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\left(\frac{r_a}{r_{ab}}\right)_{,00}+\frac{3G}{2c^4}\sum_a m_a(r_a\boldsymbol{v}_a{}^2)_{,00}$$

$$+\frac{G}{12c^2}\sum_a m_a(r_a{}^3)_{,0000}-(1-y-2y_2)\Big[\frac{G^3}{c^6}\sum_a\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_am_bm_c}{r_ar_{bc}{}^2}(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{bc})$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}\{\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\Big]$$

$$+\frac{2G}{c^2}\sum_a m_a\left(\frac{1}{r_a}\right)_{,i}\{J^{(4)}_i-(J^{(4)}_i)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}_a}\}+2\partial_0 I^{(5)} \tag{5-54}$$

となる．ここで $X^{(6)}_{00}$ の具体的表示は付録 A-4 に与えてあり，またこれは条件 $X^{(6)}_{00}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$ を満足している．

ppN 次の計量テンソルとしては $h^{(6)}_{ij}$ までであるが，次節以下での Lagrange 関数および運動方程式の議論では $h^{(6)}_{ij}\xrightarrow[r\to\infty]{}0$ さえ保証されていれば具体的関数形は必要としない．それでここでは $h^{(6)}_{ij}$ の解法には立ち入らないことにする．ただし

先に述べたように，$h^{(6)}_{ij}$ の方程式に対する可積分条件から pN 次の運動方程式が要請されることを忘れてはならない．この事と関連して ppN 次までの計量テンソルの逐次解法のさいに注意しなければならない大切な点があるので，以下でそれを述べる．

計量テンソルの時間成分 g_{00} の ppN 次までの全体を考える：

$$g_{00}=-1+h^{(2)}_{00}+h^{(4)}_{00}+h^{(6)}_{00}.$$

この中で加速度およびその高次微分を含む項は

$$(1-y-2y_2)\frac{G}{c^2}\sum_a m_a(r_a)_{,00}-\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\left(\frac{r_a}{r_{ab}}\right)_{,00}$$

$$+\frac{3G}{2c^4}\sum_a m_a(r_a \boldsymbol{v}_a{}^2)_{,00}+\frac{G}{12c^2}\sum_a m_a(r_a{}^3)_{,0000} \tag{5-55}$$

である．これらの項は運動方程式をくり返し使うことにより粒子の座標と速度の表示に書き直されるが，上に述べたように今度は運動方程式として pN 近似まで考慮しなければならない．そうすると，(5-55) の第 1 項より生じる加速度項 $-(1-y-2y_2)Gc^{-4}\sum_a m_a(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_a)$ から

$$-(1-y-2y_2)\frac{G}{c^4}\sum_a m_a(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_a)_{\mathrm{pN}} \tag{5-56}$$

という寄与が生じる．ここで $(\boldsymbol{\alpha}_a)_{\mathrm{pN}}$ は pN 次の運動方程式からの寄与を示すもので具体的には 5-3 節で与えられる．(5-56) は c^{-6} 次の量であり，したがって $h^{(6)}_{00}$ の解 (5-54) の右辺に加えられるべき量である．この寄与は $h^{(4)}_{00}$ および $h^{(4)}_{ij}$ における (5-47) 式とは異なり，$r\to\infty$ で零にはならない．そしてまたこの寄与は $h^{(6)}_{00}$ に含まれる任意関数 $J^{(4)}_i$，$I^{(5)}$ によって消去することもできない．結局，物理的に容認される座標系の規範に合致するためには

$$2y_2=1-y \tag{5-57}$$

でなければならない．

次に，(5-55) の第 2，第 3 および第 4 項は Newton 近似の運動方程式によって書き直されるが，これらはいずれも $r\to\infty$ で発散する．これらの項を消去するためには，$h^{(6)}_{00}$ 中の $2\partial_0 I^{(5)}$ で $I^{(5)}$ を

$$I^{(5)}=\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\left(\frac{r_a}{r_{ab}}\right)_{,0}-\frac{3G}{4c^4}\sum_a m_a(r_a \boldsymbol{v}_a{}^2)_{,0}$$

$$-\frac{G}{24c^2}\sum_a m_a(r_a)^3{}_{,000}+\widetilde{I}^{(5)} \tag{5-58}$$

ととればよい．ここで $\widetilde{I}^{(5)}$ は $\partial_0\widetilde{I}^{(5)}$ が空間的無限遠方での条件と物理的要請(ｉ)～(iv)を満足する任意関数である．以上によって ppN 次まで，g_{00} は

$$g_{00}\xrightarrow[r\to\infty]{}-1$$

の条件を満足する．

(5-57) および (5-58) の結果，$h_{0i}^{(5)}$ は

$$h_{0i}^{(5)}=X_{0i}^{(5)}-\frac{2G}{c^3}\sum_a m_a(r_a v_a{}^i)_{,00}+\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\left(\frac{n_a{}^i}{r_{ab}}\right)_{,0}$$

$$-\frac{3G}{4c^4}\sum_a m_a(n_a{}^i\boldsymbol{v}_a{}^2)_{,0}-\frac{G}{8c^2}\sum_a m_a(r_a{}^2n_a{}^i)_{,000}+\partial_0 J_i^{(4)}+\partial_i\widetilde{I}^{(5)} \tag{5-59}$$

となる．右辺の第 2，第 3，第 4 および第 5 項は無限遠方で零とはならない*)．これらの寄与を消去するためには，$\partial_i\widetilde{I}^{(5)}$ はこの項自体が無限遠方で零となるので，$\partial_0 J_i^{(4)}$ によって $J_i^{(4)}$ を

$$J_i^{(4)}=\frac{2G}{c^3}\sum_a m_a(r_a v_a{}^i)_{,0}-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\frac{n_a{}^i}{r_{ab}}+\frac{3G}{4c^4}\sum_a m_a(n_a{}^i\boldsymbol{v}_a{}^2)$$

$$+\frac{G}{8c^2}\sum_a m_a(r_a{}^2n_a{}^i)_{,00}+\widetilde{J}_i^{(4)} \tag{5-60}$$

ととればよい．ここで再び $\widetilde{J}_i^{(4)}$ は $\partial_0\widetilde{J}_i^{(4)}$ が空間的無限遠方での条件と物理的要請(ｉ)～(iv)を満足する任意関数である．

最後に，(5-60) で与えられる $J_i^{(4)}$ の $h_{ij}^{(4)}$ への寄与 (5-46) を調べておく．$\partial_i J_j^{(4)}+\partial_j J_i^{(4)}$ について無限遠方での振舞いが問題となるのは，(5-60) の右辺の第 1 項と第 4 項である．加速度を Newton 近似の運動方程式 (5-44) によって書き直すと，(5-60) の第 1 項の $h_{ij}^{(4)}$ への寄与は

$$\frac{2G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\{(n_a{}^iv_a{}^j+n_a{}^jv_a{}^i)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)-2v_a{}^iv_a{}^j\}$$

---

*)　第 3 項と第 4 項の関数形を組合せることにより，無限遠方で零となる関数を作ることができる．しかしここでは第 3 項と第 4 項をそのまま消去しておく．このようにしてもまだ任意関数 $\widetilde{J}_i^{(4)}$ が残っているので，以下の議論の一般性は失われない．

$$-\frac{2G^2}{c^4}\sum_{(a,b)}\frac{m_a m_b}{r_{ab}{}^2}\{n_{ab}{}^i(n_a{}^j-n_b{}^j)+n_{ab}{}^j(n_a{}^i-n_b{}^i)\}$$

第 4 項の寄与は

$$\frac{G}{4c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}[\delta_{ij}\{\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}-n_a{}^i n_a{}^j\{\boldsymbol{v}_a{}^2-3(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}$$

$$-2(n_a{}^i v_a{}^j+n_a{}^j v_a{}^i)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)+2v_a{}^i v_a{}^j]$$

$$+\frac{G^2}{4c^4}\sum_{(a,b)}\frac{m_a m_b}{r_{ab}{}^2}[\delta_{ij}(\boldsymbol{n}_a-\boldsymbol{n}_b)\cdot\boldsymbol{n}_{ab}-(n_a{}^i n_a{}^j n_a{}^k-n_b{}^i n_b{}^j n_b{}^k)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})$$

$$+(n_a{}^i-n_b{}^i)n_{ab}{}^j+(n_a{}^j-n_b{}^j)n_{ab}{}^i]$$

で，共に（5-48）により無限遠方で零となる．

以上により，条件（5-49)，(5-50）の下で物理的に容認される座標系の規範を満足する最も一般的な計量テンソルを $h_{00}^{(6)}$ まで求めた．これをまとめると次のようになる．

$$h_{00}^{(2)}=\frac{2G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a} \tag{5-61}$$

$$h_{ij}^{(2)}=\delta_{ij}\frac{2G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a}+y\frac{G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a}(\delta_{ij}-n_a{}^i n_a{}^j) \tag{5-62}$$

$$h_{0i}^{(3)}=-\frac{G}{2c^3}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\{7v_a{}^i+n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)\}-y\frac{G}{2c^3}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\{v_a{}^i-n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)\} \tag{5-63}$$

$$h_{00}^{(4)}=-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}+\frac{3G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2$$

$$-y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab}) \tag{5-64}$$

$$h_{ij}^{(4)}=\delta_{ij}\left\{\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\right.$$

$$+\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})-\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2$$

$$\left.+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\right\}+\frac{4G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}v_a{}^i v_a{}^j$$

$$-\frac{4G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b \frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i \partial z_b{}^j}\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$-\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}(\delta_{ij}-n_a{}^i n_a{}^j)$$

$$+\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}{}^2}\{(\delta_{ij}-n_a{}^i n_a{}^j)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})-7(n_a{}^i n_{ab}{}^j+n_a{}^j n_{ab}{}^i)\}$$

$$+\frac{G}{4c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}[\delta_{ij}\{7\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}-n_a{}^i n_a{}^j\{7\boldsymbol{v}_a{}^2-3(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}$$

$$+6(n_a{}^i v_a{}^j+n_a{}^j v_a{}^i)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)-14v_a{}^i v_a{}^j]$$

$$+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\{n_a{}^i n_b{}^j+n_a{}^j n_b{}^i-\delta_{ij}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}$$

$$+y^2\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}\{\delta_{ij}-n_a{}^i n_a{}^j-n_b{}^i n_b{}^j+n_a{}^i n_b{}^j(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}$$

$$+\partial_i\widetilde{J}_j^{(4)}+\partial_j\widetilde{J}_i^{(4)} \tag{5-65}$$

$$h_{0i}^{(5)}=X_{0i}^{(5)}+\partial_0\widetilde{J}_i^{(4)}+\partial_i\widetilde{I}^{(5)} \tag{5-66}$$

$$h_{00}^{(6)}=X_{00}^{(6)}-\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}[(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\{7\boldsymbol{v}_b{}^2-(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}-14(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)]$$

$$+\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}[(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\{7\boldsymbol{v}_b{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}-14(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)]$$

$$+\frac{G^3}{c^6}\sum_a\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c}{r_a{}^2 r_{bc}}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)-\frac{G^3}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c}{r_a{}^2 r_{bc}}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})$$

$$-\frac{G^3}{4c^6}\sum_a\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c r_b}{r_a{}^2 r_{bc}{}^2}\{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{bc})-15(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{bc})\}$$

$$+\frac{G^3}{4c^6}\sum_a\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c r_{ab}}{r_a{}^2 r_{bc}{}^2}\{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{bc})-15(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{bc})\}$$

$$+\frac{2G}{c^2}\sum_a m_a\left(\frac{1}{r_a}\right)_{,i}\{\widetilde{J}_i^{(4)}-(\widetilde{J}_i^{(4)})_{x=z_a}\}+2\partial_0\widetilde{I}^{(5)} \tag{5-67}$$

さて，次節以降のために $h^{(4)}_{ij}$ の形を整理しておこう．3次元の対称テンソル $A_{ij}=A_{ji}$ は次の形に一意的に分解される*)．

$$A_{ij}=A^{TT}_{ij}+A^{T}_{ij}+A_{i,j}+A_{j,i} \tag{5-68}$$

ここで

$$A^{T}_{ij}=\frac{1}{2}\left(A^{T}\delta_{ij}-\frac{1}{\triangle}A^{T}{}_{,ij}\right)$$

$$A^{T}=A_{ii}-\frac{1}{\triangle}A_{ij,ij} \tag{5-69}$$

$$A_{i}=\frac{1}{\triangle}\left(A_{ij,j}-\frac{1}{2\triangle}A_{jk,jki}\right)$$

であり，A^{T}_{ij} および A^{TT}_{ij} はそれぞれ条件

$$\partial_i A^{T}_{ij}=0 \tag{5-70}$$

$$A^{TT}_{ii}=0,\quad \partial_i A^{TT}_{ij}=0^{**)} \tag{5-71}$$

を満足する．上式中で $\frac{1}{\triangle}$ 記号は Laplace 方程式の Green 関数であり

$$\frac{1}{\triangle}A_{ij}=-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}A_{ij}(\boldsymbol{x}')d^3x' \tag{5-72}$$

を意味する．$h^{(4)}_{ij}$ に含まれる

$$f_{ij}=\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}\ln(r_a+r_b+r_{ab})\quad および\quad \frac{G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}v_a{}^i v_a{}^j$$

から，上の分解にしたがって TT- 部を取り出すと

$$\begin{aligned}f^{TT}_{ij}=f_{ij}-\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\Bigg[&\delta_{ij}\left\{\frac{1}{r_a r_b}-\frac{2}{r_a r_{ab}}+2\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{r_{ab}{}^2}\right\}\\&+\partial_i\partial_j\left\{\ln(r_a+r_b+r_{ab})-\frac{r_a}{r_{ab}}+\frac{r_a{}^2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{2r_{ab}{}^2}\right\}\\&-4\frac{n_a{}^i n_{ab}{}^j+n_a{}^j n_{ab}{}^i}{r_{ab}{}^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{5-73}$$

---

*) 一般的には必ずしもテンソルである必要はない．

**) (5-71) の2つの条件は横波 (Transverse) 条件と対角和が零 (Traceless) の条件である．以後 A^{TT}_{ij} を A_{ij} の TT- 部と表記する．

$$\left(\frac{G}{c^4}\sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a{}^i v_a{}^j\right)^{\rm TT} = \frac{G}{c^4}\sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a{}^i v_a{}^j - \frac{G}{c^4}\sum_a m_a\Bigg[\delta_{ij}\frac{\boldsymbol{v}_a{}^2+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2}{4r_a}$$

$$+\partial_i\partial_j\left(-\frac{3}{8}r_a\boldsymbol{v}_a{}^2+\frac{1}{16}r_a\{\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\{v_a{}^i\partial_j(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)+v_a{}^j\partial_i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)\}\Bigg] \tag{5-74}$$

となる．また $f_{ij}^{\rm TT}$ を積分表示すると

$$f_{ij}^{\rm TT} = \frac{G^2}{2c^4(2\pi^2)^2}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b \int d^3k_1 d^3k_2\, {\rm e}^{i\{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{z}_a)+(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{z}_b)+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\}}$$

$$\times\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}^2}\Bigg[k_1{}^i k_2{}^j+k_1{}^j k_2{}^i-\left\{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_2)}{\boldsymbol{k}^2}\right\}\left(\delta_{ij}-\frac{k^i k^j}{\boldsymbol{k}^2}\right)$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)(k^i k_2{}^j+k^j k_2{}^i)+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_2)(k^i k_1{}^j+k^j k_1{}^i)\}$$

$$+2\frac{k^i k^j(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_2)}{(\boldsymbol{k}^2)^2}\Bigg] \tag{5-75}$$

と表わされる．ここで $\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)$ である．

(5-73) と (5-74) を用いて $h_{ij}^{(4)}$ を書き直すと

$$h_{ij}^{(4)} = \delta_{ij}\Bigg\{\frac{3G^2}{2c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}-\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}+\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2$$

$$+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\Bigg\}+h_{ij}^{\rm TT(4)}$$

$$+\partial_i\partial_j\Bigg\{-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\ln(r_a+r_b+r_{ab})-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\frac{r_a}{r_{ab}}$$

$$+\frac{G}{2c^4}\sum_a m_a r_a\boldsymbol{v}_a{}^2\Bigg\}$$

$$+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\{n_a{}^i n_b{}^j+n_a{}^j n_b{}^i-\delta_{ij}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}$$

$$+y^2\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}\{\delta_{ij}-n_a{}^i n_a{}^j-n_b{}^i n_b{}^j+n_a{}^i n_b{}^j(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}$$

$$+\partial_i\widetilde{J}_j^{(4)}+\partial_j\widetilde{J}_i^{(4)} \tag{5-76}$$

となる．ここで $h_{ij}^{\mathrm{TT}(4)}$ は $h_{ij}^{(4)}$ の y に無関係な部分の TT- 部で

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}(4)} = -4f_{ij}^{\mathrm{TT}} + 4\left(\frac{G}{c^4}\sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a{}^i v_a{}^j\right)^{\mathrm{TT}} \tag{5-77}$$

で与えられる．(5-76) の表示を見ると，任意関数 $\widetilde{J}_i^{(4)}$ を

$$\widetilde{J}_i^{(4)} = \frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b \partial_i \ln(r_a + r_b + r_{ab}) + \frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b \frac{n_a{}^i}{r_{ab}}$$

$$-\frac{G}{4c^4}\sum_a m_a n_a{}^i \boldsymbol{v}_a{}^2 \tag{5-78}$$

と選ぶのが便利であることがわかる．このことについては次節で Lagrange 関数を求める際に議論する．

最後に de Donder の座標条件 (5-15) のもとでの解を示しておく．この場合の解は各オーダーでの任意関数 I，J_i を次のように選ぶことに対応する．

$$I^{(2)} = 0,\quad I^{(3)} = 0\ (y_2 = 0),\quad I^{(4)} = 0,\quad I^{(5)} = -\frac{G^2}{4c^5}\sum_a m_a{}^2 \frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)}{r_a}$$

$$J_i^{(2)} = 0\ (y = 0),\quad J_i^{(3)} = 0,\quad J_i^{(4)} = -\frac{G^2}{4c^4}\sum_a m_a{}^2 \frac{n_a{}^i}{r_a},\quad J_i^{(5)} = 0 \tag{5-79}$$

このとき，(5-52) と (5-54) からわかるように $h_{0i}^{(5)}$ および $h_{00}^{(6)}$ は空間的無限遠方での条件を満足しない．特に $h_{00}^{(6)}$ は $r\to\infty$ で発散する．したがって de Donder の座標条件は c^{-1} 展開においては物理的に容認される座標系の規範に合致しない．ただし注意しておくが，1 体系に限っては de Donder 条件のもとでも厳密な解が得られる．また $h_{\mu\nu}^{(4)}$ までであれば解は正当なものである．

§5-2 Fokker 型の変分原理

よく知られているように，Einstein の重力理論の重要な結論の 1 つは重力輻射の存在である．次章で詳しく論じるが，重力場が物質のエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ と結合する 2 階のテンソルであることにより，重力輻射は 4 極放射またはこれより高次の多極放射となる*)．系のエネルギーを c^{-1} 展開で考えると，重力輻射の寄与は ppN 次より 1 つ高い次の近似からはじめて現われる．したがって，ppN 近似までは粒子の運動を，重力場を陽に扱うことなく，粒子同士が直接相互作用す

*) 一般的には双極放射もあるが，これは適当な座標変換によって消去できる．

るという**遠隔作用**（Action at a distance）の立場で記述できるはずである．このように遠隔作用の立場で理論を構成する考えは1929年に Fokker によって電気力学の場合に提案されたのであるが，重力場への応用は Infeld と Plebański によってなされた[3]．この節では彼らの一般論を説明した後に，具体的に粒子系の Lagrange 関数を ppN 次まで求める[4]．

はじめに，Einstein の重力理論の基本的骨組みをもう1度整理しておく．系を記述する作用積分は第4章で論じたように

$$I=\frac{1}{c}\int d^4x(\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}) \tag{5-80}$$

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}(x)=-\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\,R \tag{5-81}$$

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}(x)=-\sum_a m_a c^2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dz_a{}^\mu}{ds_a}\frac{dz_a{}^\nu}{ds_a}}\,\delta^{(4)}(x-z_a(s_a))ds_a \tag{5-82}$$

である．$\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}(x)$ は（1-28′）を一般の座標系で書き表わしたものである．この作用積分の $g^{\mu\nu}$ に対する変分をとることにより重力場の方程式が，そして $z_a{}^\lambda$ に対する変分をとることにより粒子の運動方程式が導かれる：

$$\frac{\delta I}{\delta g^{\mu\nu}}=0\longrightarrow R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{5-83}$$

$$\frac{\delta I}{\delta z_a{}^\lambda}=0\longrightarrow \frac{d}{ds_a}\left\{\widetilde{g_{\lambda\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\nu}{ds_a}\right\}-\frac{1}{2}\widetilde{g_{\mu\nu,\lambda}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{ds_a}\frac{dz_a{}^\nu}{ds_a}=0 \tag{5-84}$$

ここで粒子の世界線 $z_a{}^\mu(s_a)$ 上での重力場の値 $\widetilde{g_{\lambda\nu}}(z_a)$，$\widetilde{g_{\mu\nu,\lambda}}(z_a)$ は Infeld の δ 関数により

$$\begin{aligned}\widetilde{g_{\lambda\nu}}(z_a)&=\int d^4x\delta^{(4)}(x-z_a)g_{\lambda\nu}(x)\\ \widetilde{g_{\mu\nu,\lambda}}(z_a)&=\int d^4x\delta^{(4)}(x-z_a)g_{\mu\nu,\lambda}(x)\end{aligned} \tag{5-85}$$

で定義される．運動方程式（5-84）はさらに次の形に変形される：

$$\frac{d^2z_a{}^\rho}{ds_a{}^2}+\widetilde{\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{ds_a}\frac{dz_a{}^\nu}{ds_a}=0 \tag{5-86}$$

ただし

$$\widetilde{\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}}(z_a)=\int d^4x\delta^{(4)}(x-z_a)\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}(x) \tag{5-87}$$

である*).

運動方程式 (5-84) を具体的に解いてその世界線 $z_a^{\mu}(s_a)$ を求めるためには重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ を知らねばならず，重力場の方程式 (5-83) を解いて $g_{\mu\nu}(x)$ を求めるためには $T^{\mu\nu}$ すなわち粒子の運動の世界線を知らねばならない．このように場の方程式と粒子の運動方程式は連結している．そして前節で論じたように，場の方程式を解くさいに Bianchi の恒等式を通しても運動方程式が導かれる．

以上の議論では，粒子の世界線を記述するパラメータとして，各粒子ごとにその世界線に沿って測った曲線の長さ s_a を用いた．しかし運動方程式を実際に解く場合には各粒子共通の座標時間 x^0 をパラメータに選ぶことが便利なので，(5-84) を x^0 による表示に書き直しておく**).

$$\frac{d}{dx^0}\left\{\mu_a \widetilde{g_{\lambda\nu}}(z_a)\frac{dz_a^{\nu}}{dx^0}\right\}-\frac{1}{2}\mu_a \widetilde{g_{\mu\nu,\lambda}}(z_a)\frac{dz_a^{\mu}}{dx^0}\frac{dz_a^{\nu}}{dx^0}=0 \tag{5-88}$$

ここで μ_a は表示を簡単にするために導入した形式的質量で

$$\mu_a=\frac{m_a}{\sqrt{-\widetilde{g_{\alpha\beta}}(z_a)\dfrac{dz_a^{\alpha}}{dx^0}\dfrac{dz_a^{\beta}}{dx^0}}} \tag{5-89}$$

である．また，対応して Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}(x)$ も x^0 表示にすると

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}(x)=-\sum_a m_a c^2\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\frac{dz_a^{\mu}}{dx^0}\frac{dz_a^{\nu}}{dx^0}}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a(x^0)) \tag{5-90}$$

となる．ただし $z_a^0=x^0$ である．

Fokker 型の変分原理を得るためには，重力場の変数は何らかの方法で消去されねばならない***). そこで前節で解いたように，計量テンソルは重力場の方程式の解

---

*) 前節の解からわかるように，われわれの扱う重力場の関数 $g_{\lambda\nu}(x)$，$g_{\mu\nu,\lambda}(x)$ 等は $1/r_b$ のべきで表わされる．このような関数の積については一般に $\widetilde{F}\cdot\widetilde{G}=\widetilde{FG}$ が成り立つ．

**) 前節では，x^0 をパラメータとして $T^{\mu\nu}$ を表示し，場の方程式を解いた．

***) 考え方を理解するための簡単な例題として Newton の重力理論における Fokker 型 Lagrange 関数を求めてみよ．補助的重力場 $\varphi(x)$ を導入し粒子と場を記述する作用を定めた後，場の方程式の解を使って $\varphi(x)$ を消去し，作用を粒子の座標 $\boldsymbol{z}_a$ と速度 $\boldsymbol{v}_a$ のみで書き表わしてみよ．粒子系の運動を記述する正しい Lagrange 関数が得られる．

として粒子の座標と速度の関数として与えられるとしよう．加速度やそれ以上の高階微分は含まないとする：

$$g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x^0,\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}_1(x^0),\ \boldsymbol{v}_1(x^0),\ \boldsymbol{z}_2(x^0),\ \boldsymbol{v}_2(x^0),\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_n(x^0),\ \boldsymbol{v}_n(x^0)). \tag{5-91}$$

さて，Infeld と Plebański の答は次の通りである．

「計量テンソル（5-91）を（5-80）の右辺 $\boldsymbol{L}_G(x)+\boldsymbol{L}_M(x)$ に代入し，すべてを粒子の変数で書き表わしたものが粒子系の運動を記述する作用積分である」．

これを証明するために，いくつかの準備をしよう．

(1)　Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}_G(x)$ において $\sqrt{-g}\,R$ を次のように変形する．

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,R&=\sqrt{-g}\,G+\partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu\\ G&=g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\rho\lambda}-\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda})\\ \boldsymbol{D}^\mu&=\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda}-g^{\nu\lambda}\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda})\end{aligned} \tag{5-92}$$

4次元発散 $\partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu$ の作用積分への寄与は考えている4次元領域Ωの表面上の積分となる．Ωの表面上での変分は0とするので，結局 $\partial_\mu \boldsymbol{D}^\mu$ は方程式には何ら寄与しない．具体的計算の場合にはこの項を除いてしまう方が便利である．そこで Lagrange 関数として

$$\begin{aligned}L_G&=\int d^3x\boldsymbol{L}_G{}^*(x)\\ \boldsymbol{L}_G{}^*(x)&=-\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\,G\end{aligned} \tag{5-93}$$

とおく．ここで $\sqrt{-g}\,G$ は（5-91）を代入した関数である．

(2)　$\boldsymbol{L}_M(x)$ については

$$\begin{aligned}L_M&=\int d^3x\boldsymbol{L}_M(x)\\ &=-\sum_a m_a c^2\sqrt{-\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}}\end{aligned} \tag{5-94}$$

とおく．ここで $\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_a)$ は定義式（5-85）および（5-91）より

$$\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_a)=g_{\mu\nu}(x^0,\ \boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{z}_2,\ \boldsymbol{v}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_n,\ \boldsymbol{v}_n) \tag{5-95}$$

である．

(3)　この（5-95）の表示から $\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_a)$ には a 番目の粒子の変数について二重の依存性があることがわかる．1つは（5-91）に含まれる $\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{v}_a$ の依存性であり，

もう1つはδ関数を通して生じるz_aの依存性である．したがって$\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_a)$の微分は次のようになる：

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_a)=\widetilde{g_{\mu\nu,0}}(z_a)+\widetilde{g_{\mu\nu,i}}(z_a)\frac{v_a{}^i}{c}$$

$$=\widetilde{g_{\mu\nu,\lambda}}(z_a)\frac{dz_a{}^\lambda}{dx^0} \tag{5-96}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_b{}^i}\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_a)=\widetilde{\frac{\partial}{\partial z_b{}^i}g_{\mu\nu}}(z_a)+\widetilde{g_{\mu\nu,i}}(z_a)\delta_{ab}. \tag{5-97}$$

(5-96) では$z_a{}^0=x^0$であることを利用して4次元の形式に書き直した．

証明すべきことは，作用積分

$$I_{\rm F}=\frac{1}{c}\int_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}dx^0(L_{\rm G}+L_{\rm M}) \tag{5-98}$$

の粒子の座標についての変分によって，粒子系の正しい運動方程式が導かれることである．

はじめに，変分δz_a（$\delta z_a(x^{0\prime})=\delta z_a(x^{0\prime\prime})=0$）に対して$\delta\int_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}dx^0L_{\rm M}$を計算すると

$$\delta\int_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}dx^0L_{\rm M}=c\frac{\partial L_{\rm M}}{\partial v_a{}^i}\delta z_a{}^i\Big|_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}+\int_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}dx^0\left(\frac{\partial L_{\rm M}}{\partial z_a{}^i}-c\frac{d}{dx^0}\frac{\partial L_{\rm M}}{\partial v_a{}^i}\right)\delta z_a{}^i$$

$$=\int_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}dx^0\Bigg[-\sum_b m_bc^2\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}\sqrt{-\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_b)\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}}$$

$$+\sum_b m_bc^3\frac{d}{dx^0}\left\{\frac{\partial}{\partial v_a{}^i}\sqrt{-\widetilde{g_{\mu\nu}}(z_b)\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}}\right\}\Bigg]\delta z_a{}^i.$$

(5-96) を使い整理すると

$$\delta\int_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}dx^0L_{\rm M}=\int_{x^{0\prime}}^{x^{0\prime\prime}}dx^0\Bigg[-\frac{d}{dx^0}\left\{\mu_ac^2\widetilde{g_{i\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}\right\}+\frac{1}{2}\mu_ac^2\widetilde{g_{\mu\nu,i}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_b\mu_bc^2\widetilde{\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}g_{\mu\nu}}(z_b)\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx^0}\left\{\sum_b\mu_bc^3\widetilde{\frac{\partial}{\partial v_a{}^i}g_{\mu\nu}}(z_b)\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\right\}\Bigg]\delta z_a{}^i \tag{5-99}$$

となる．この右辺の括弧内の第1項と第2項が正しい運動方程式を与える寄与であ

る．

次に，$\delta\int_{x^{0'}}^{x^{0''}}dx^0L_{\rm G}=-\dfrac{c^4}{16\pi G}\delta\int_{x^{0'}}^{x^{0''}}dx^0\int_{\Omega(3)}d^3x\sqrt{-g}\,G$ を計算する．$\sqrt{-g}\,G$ は $g_{\mu\nu}$ およびその1次微分の関数なので，変分 δz_a に対する $g_{\mu\nu}$ の変化量を計算しておくと

$$\delta g_{\mu\nu}=\sum_a\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z_a{}^i}\,\delta z_a{}^i+\sum_a\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial v_a{}^i}\,\delta v_a{}^i \tag{5-100}$$

となる．作用積分の両端 $x^{0'}$，$x^{0''}$ での座標および速度の変分は0とするので

$$\delta g_{\mu\nu}(x^{0'})=\delta g_{\mu\nu}(x^{0''})=0 \tag{5-101}$$

である．(5-100) の表示を使うと $\int_{x^{0'}}^{x^{0''}}dx^0L_{\rm G}$ の変分は次のようになる．

$$\begin{aligned}\delta\int_{x^{0'}}^{x^{0''}}dx^0\,L_{\rm G}=&-\frac{c^4}{16\pi G}\int_{x^{0'}}^{x^{0''}}dx^0\int_{\Omega(3)}d^3x\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right)\right\}\delta g_{\mu\nu}\\&-\frac{c^4}{16\pi G}\int_{x^{0'}}^{x^{0''}}dx^0\int_{S(2)}dS_i\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,i}}\,\delta g_{\mu\nu}\\&-\frac{c^4}{16\pi G}\int_{\Omega(3)}d^3x\,\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,0}}\,\delta g_{\mu\nu}\Big|_{x^{0'}}^{x^{0''}}.\end{aligned} \tag{5-102}$$

第2項における記号 dS_i は $dS_1=dx^2dx^3$，$dS_2=dx^3dx^1$，$dS_3=dx^1dx^2$ であり，$S_{(2)}$ は3次元空間を囲む無限遠方の2次元面を表わす．第3項は (5-101) により0となる．

$\sqrt{-g}\,G$ と $\sqrt{-g}\,R$ は Lagrange 関数として等価であることから

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right)=-\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) \tag{5-103}$$

が成り立つ．この式と (5-83) および (5-4) から

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu}}-\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right)=\frac{8\pi G}{c^4}\sum_b\mu_bc^2\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b) \tag{5-104}$$

を得る．左辺は $g_{\mu\nu}$ に解 (5-91) を代入したものである．

ただし，前節で論じたように場の方程式 (5-104) をある近似で解くときには，それより低い近似での運動方程式が自動的に要請されたことに注意する．実際には $g_{ij}^{(4)}$ 以上の近似の解を代入すると (5-104) は運動方程式を与える．したがって，この証明では Lagrange 関数の変分の中で暗に運動方程式が使われることになる．

Lagrange 関数の変分それ自体は運動方程式を意味しているので，ある近似の運動方程式の中でそれより低次の運動方程式が使われるという反復法になっている．この事は §5-3 で扱う“Lagrange 関数自体の中で運動方程式を使う（もちろん一般的には許されない）問題”とはまったく違うので注意しなければならない．

(5-104) を代入することにより，(5-102) の第1項は

$$-\frac{1}{2}\int_{x^{0'}}^{x^{0''}} dx^0 \int_{\Omega(3)} d^3x \left\{\sum_b \mu_b c^2 \frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b)\right\}\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z_a{}^i}\delta z_a{}^i+\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial v_a{}^i}\delta v_a{}^i\right)$$

$$=\int_{x^{0'}}^{x^{0''}} dx^0\left[-\frac{1}{2}\sum_b \mu_b c^2 \widetilde{\frac{\partial}{\partial z_a{}^i} g_{\mu\nu}(z_b)}\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{d}{dx^0}\left\{\sum_b \mu_b c^3 \widetilde{\frac{\partial}{\partial v_a{}^i} g_{\mu\nu}(z_b)}\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\right\}\right]\delta z_a{}^i$$

$$-\frac{1}{2}\sum_b \mu_b c^2 \widetilde{\frac{\partial}{\partial v_a{}^i} g_{\mu\nu}(z_b)}\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\delta z_a{}^i\Bigg|_{x^{0'}}^{x^{0''}}$$

となるが，この最後の項は 0 である．

結局，L_G の作用積分の変分は

$$\delta\int_{x^{0'}}^{x^{0''}} dx^0 L_G=\int_{x^{0'}}^{x^{0''}} dx^0\left[-\frac{1}{2}\sum_b \mu_b c^2 \widetilde{\frac{\partial}{\partial z_a{}^i} g_{\mu\nu}(z_b)}\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{d}{dx^0}\left\{\sum_b \mu_b c^3 \widetilde{\frac{\partial}{\partial v_a{}^i} g_{\mu\nu}(z_b)}\frac{dz_b{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_b{}^\nu}{dx^0}\right\}\right]\delta z_a{}^i$$

$$-\frac{c^4}{16\pi G}\int_{x^{0'}}^{x^{0''}} dx^0\int_{S(2)} dS_i\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,i}}\delta g_{\mu\nu} \qquad (5\text{-}105)$$

となる．

(5-99) と (5-105) より，作用積分 I_F の変分は

$$\delta I_F=\frac{1}{c}\int_{x^{0'}}^{x^{0''}} dx_0\left[\left\{-\frac{d}{dx^0}\left(\mu_a c^2\,\widetilde{g_{i\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\mu_a c^2\,\widetilde{g_{\mu\nu,i}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}\right\}\delta z_a{}^i-\frac{c^4}{16\pi G}\int_{S(2)} dS_i\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,i}}\delta g_{\mu\nu}\right]$$

$$(5\text{-}106)$$

で与えられる．

この結果から，次のような Fokker の変分原理が得られる．

表面積分についての条件

$$\int_{S(2)} dS_i \frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,i}}\delta g_{\mu\nu} = 0 \tag{5-107}$$

が満たされるならば，$\delta I_{\mathrm{F}}=0$ は正しい運動方程式

$$\frac{d}{dx^0}\left\{\mu_a\,\widetilde{g_{i\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}\right\}-\frac{1}{2}\mu_a\,\widetilde{g_{\mu\nu,i}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}=0 \tag{5-108}$$

を与える．すなわち，条件（5-107）のもとで

$$\begin{aligned} L &= L_{\mathrm{G}}+L_{\mathrm{M}} \\ &= -\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\sqrt{-g}\,G-\sum_a m_a c^2\sqrt{-\widetilde{g_{\mu\nu,i}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}} \end{aligned} \tag{5-109}$$

は粒子系の運動を記述する Fokker 型 Lagrange 関数である．

ここで導かれた運動方程式（5-108）を（5-88）と比較すると，（5-88）は $\lambda=0$ の場合としてもう1個の方程式

$$\frac{d}{dx^0}\left\{\mu_a\,\widetilde{g_{0\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}\right\}-\frac{1}{2}\mu_a\,\widetilde{g_{\mu\nu,0}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}=0 \tag{5-110}$$

を与えている．しかし実際にはこの方程式は独立ではなく，運動方程式（5-108）と μ_a の定義式（5-89）とから導かれるものである．このことを証明しておこう．

$$E_0=\frac{d}{dx^0}\left\{\mu_a\,\widetilde{g_{0\nu}}(z_a)\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}\right\}-\frac{1}{2}\mu_a\,\widetilde{g_{\mu\nu,0}}(z_a)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0} \tag{5-111}$$

とおく．この式と（5-108）とをまとめ（5-96）を使うと

$$E_0\delta^0{}_\gamma=\frac{d\mu_a}{dx^0}\widetilde{g_{\gamma\nu}}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}+\mu_a\,\widetilde{g_{\gamma\nu}}\frac{d^2z_a{}^\nu}{dx^{02}}+\mu_a\left(\widetilde{g_{\gamma\nu,\mu}}-\frac{1}{2}\widetilde{g_{\mu\nu,\gamma}}\right)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}$$

を得る．ここで $\widetilde{g^{\rho\gamma}}(z_a)\widetilde{g_{\gamma\nu}}(z_a)=\delta^\rho{}_\nu$ で定義される $\widetilde{g^{\rho\gamma}}(z_a)$ を掛けると

$$E_0\,\widetilde{g^{\rho0}}=\frac{d\mu_a}{dx^0}\frac{dz_a{}^\rho}{dx^0}+\mu_a\frac{d^2z_a{}^\rho}{dx^{02}}+\mu_a\,\widetilde{g^{\rho\gamma}}\left(\widetilde{g_{\gamma\nu,\mu}}-\frac{1}{2}\widetilde{g_{\mu\nu,\gamma}}\right)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}$$

となる．成分に分けると

$\rho=0$ では

$$E_0\,\widetilde{g^{00}}=\frac{d\mu_a}{dx^0}+\mu_a\,\widetilde{g^{0\gamma}}\left(\widetilde{g_{\gamma\nu,\mu}}-\frac{1}{2}\widetilde{g_{\mu\nu,\gamma}}\right)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}$$

$\rho=i$ では

$$E_0\,\widetilde{g^{i0}}=\frac{d\mu_a}{dx^0}\frac{dz_a{}^i}{dx^0}+\mu_a\frac{d^2z_a{}^i}{dx^{02}}+\mu_a\,\widetilde{g^{i\gamma}}\left(\widetilde{g_{\gamma\nu,\mu}}-\frac{1}{2}\widetilde{g_{\mu\nu,\gamma}}\right)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}$$

である．この両式から $d\mu_a/dx^0$ を消去して

$$\mu_a\frac{d^2z_a{}^i}{dx^{02}}=\mu_a\left(\widetilde{g_{\gamma\nu,\mu}}-\frac{1}{2}\widetilde{g_{\mu\nu,\gamma}}\right)\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}\left(\widetilde{g^{0\gamma}}\frac{dz_a{}^i}{dx^0}-\widetilde{g^{i\gamma}}\right)$$

$$+E_0\left(\widetilde{g^{i0}}-\widetilde{g^{00}}\frac{dz_a{}^i}{dx^0}\right)\tag{5-112}$$

を得る．また (5-111) で，μ_a の定義 (5-89) を使い $d\mu_a/dx^0$ を直接計算することにより

$$\left(\widetilde{g_{\alpha\beta}}\frac{dz_a{}^\alpha}{dx^0}\frac{dz_a{}^\beta}{dx^0}\right)E_0=\mu_a(\widetilde{g_{\alpha\beta}}\,\widetilde{g_{0i}}-\widetilde{g_{i\beta}}\widetilde{g_{0\alpha}})\frac{dz_a{}^\alpha}{dx^0}\frac{dz_a{}^\beta}{dx^0}\frac{d^2z_a{}^i}{dx^{02}}$$

$$-\frac{1}{2}\mu_a(\widetilde{g_{\alpha\beta,\mu}}\,\widetilde{g_{0\nu}}+\widetilde{g_{\alpha\beta}}\,\widetilde{g_{\mu\nu,0}}-2\widetilde{g_{\alpha\beta}}\,\widetilde{g_{0\nu,\mu}})\frac{dz_a{}^\alpha}{dx^0}\frac{dz_a{}^\beta}{dx^0}\frac{dz_a{}^\mu}{dx^0}\frac{dz_a{}^\nu}{dx^0}$$

を得る．この式に (5-112) で与えられる $\dfrac{d^2z_a{}^i}{dx^{02}}$ を代入し，少し長い計算の後に整理すると

$$E_0\,\widetilde{g_{0\alpha}}\frac{dz_a{}^\alpha}{dx^0}=0$$

となる．したがって $E_0=0$，すなわち (5-110) が導かれた．

さて，Fokker 型 Lagrange 関数の特徴について述べておこう．Lagrange 関数 (5-109) は加速度項を含む．すなわち，$g_{\mu\nu}(x)$ は座標と速度の関数として与えられているので，$g_{\mu\nu,\lambda}$ の $\lambda=0$ 成分 $g_{\mu\nu,0}$ を通して加速度項が生じる．(5-92) からわかるように，$\sqrt{-g}\,G$ 中の $g_{\alpha\beta,0}\,g_{\mu\nu,0}$ より L_G は一般に加速度を 2 次で含む．しかし，Fokker の変分原理においては $g_{\alpha\beta,0}$ の変分 $\delta g_{\alpha\beta,0}=\partial_0(\delta g_{\alpha\beta})$ は部分積分されるので，加速度の変分 $\delta a_a{}^i$ は直接には現われない．次節で L_G+L_M を逐次近似で計算するが，pN 近似では加速度項は生じない．ppN 近似では一般に加速度は 1 次で含まれるが，座標系を上手に選ぶことにより加速度を含まない Lagrange 関数を定めることができる．したがって加速度項が陽に現われるのは ppN より高い近似においてである．

加速度項を含む Lagrange 関数という力学系の問題は最近理論的研究が進められ

つつあるが，重力相互作用をする多体粒子系は荷電粒子系とともに具体例として興味が持たれている．これについては§7-5で論じる．

最後に表面積分の条件（5-107）を吟味する．（5-107）が成り立つためには被積分関数

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,i}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial z_a{}^j}\quad および\quad \frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,i}}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial v_a{}^j}$$

が $r\to\infty$ で少なくとも r^{-3} よりはやく減衰すればよい．$\dfrac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{\mu\nu,i}}$ を $h_{\mu\nu}$ によって展開すると

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{00,i}}=-\frac{1}{2}(h_{il,l}-h_{ll,i}+h_{i0,0})+O(h^2)$$

$$\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{0j,i}}=\frac{1}{4}\{-\delta_{ij}(h_{ll,0}-h_{00,0})+2(h_{ij,0}-h_{0i,j}+h_{0j,i})\}+O(h^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{-g}\,G}{\partial g_{jk,i}}=\frac{1}{4}\{&\delta_{ij}(h_{ll,k}-h_{00,k})+\delta_{ik}(h_{ll,j}-h_{00,j})\\&+2\delta_{jk}(-h_{i0,0}+h_{il,l}+h_{00,i}-h_{ll,i})\\&-2(h_{ij,k}+h_{ki,j}-h_{jk,i})\}+O(h^2)\end{aligned}$$

となる．前節で解いた

$$h_{\mu\nu}\xrightarrow[r\to\infty]{}O\left(\frac{1}{r}\right)$$

を満足する解については，上記の展開形から $h_{\mu\nu,j}$ 型の項および $h_{\mu\nu}$ の2次以上の項は条件を満足することはすぐわかる．すなわち，これらの項は $r\to\infty$ で r^{-2} よりはやく減衰し，$\partial g_{\mu\nu}/\partial z_a{}^j$ および $\partial g_{\mu\nu}/\partial v_a{}^j$ は少なくとも r^{-1} で減衰するからである．唯一注意を必要とするのは時間微分の項 $h_{\mu\nu,0}$ で，これについては次節で具体的に説明し，少なくともppN近似までは条件を満足していることを示す．一方，$h_{\mu\nu}$ が $r\to\infty$ で発散する解の場合には表面積分の条件が一般的には満足されないことは明らかである．

§5-3　多体系のLagrange 関数：ポスト-ポスト-Newton 近似

この節では Fokker 型 Lagrange 関数（5-109）を §5-1 で解いた計量テンソルを用いて ppN 次まで計算する[1, 4]．Lagrange 関数 $L_G{}^*(x)$ および $L_M(x)$ の $h_{\mu\nu}$ による展開形は付録 A-5 に与えてある．その中で時間についての全微分の項は作用積分の変分に寄与しない，すなわち運動方程式に寄与しないので Lagrange 関数の計算のさいには除くことができる．

Lagrange 関数を c^{-1} 展開で求めるために

$$L = -\sum_a m_a c^2 + \sum_{n=0}^{\infty} L^{(n)} \tag{5-113}$$

とおく．ここで $L^{(n)}$ は c^{-1} 展開の n 次の寄与で，括弧内の数は c^{-1} の次数を表わす．さて最低次から逐次的に計算しよう．（A5-2）および（A5-5）より，

$$\begin{aligned} L^{(0)} = &\sum_a m_a c^2\left\{\frac{v_a{}^2}{2c^2}+\frac{1}{2}h^{(2)}_{00}(z_a)\right\} \\ &+\frac{c^4}{64\pi G}\int d^3x\,\{2h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{ij,j}-2h^{(2)}_{00,j}h^{(2)}_{ii,j} \\ &-h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{ij,k}+h^{(2)}_{ii,k}h^{(2)}_{jj,k}+2h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{ik,j}-2h^{(2)}_{ii,j}h^{(2)}_{jk,k} \\ &+2h^{(2)}_{0i,j}h^{(2)}_{0i,j}-2h^{(2)}_{0i,j}h^{(2)}_{0j,i}\} \end{aligned} \tag{5-114}$$

となる．解（5-20），（5-21）および（5-22）を代入し計算すると，まず $I^{(2)}$ の寄与は打消し合い，$J^{(2)}_i$ の寄与は部分積分によって消去され

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= \frac{1}{2}\sum_a m_a\{v_a{}^2+c^2h^{(2)}_{00}(z_a)\}-\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\; h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{00,i} \\ &= \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a{}^2+\frac{c^2}{4}\sum_a m_a h^{(2)}_{00}(z_a) \end{aligned}$$

となり，結局

$$L^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_a m_a v_a{}^2+\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}} \tag{5-115}$$

を得る．これは Newton 近似の Lagrange 関数である．

空間積分の計算には部分積分法を多用するが，そのさい生じる表面積分の寄与は，

§5-1で求めた解 $h_{\mu\nu}$ が空間的遠方で少なくとも r^{-1} で減衰するので，すべて0である．

次に $L^{(1)}$ は形式的には

$$L^{(1)}=\frac{c^4}{64\pi G}\int d^3x\{2h^{(2)}_{00,i}h^{(3)}_{ij,j}+2h^{(3)}_{00,i}h^{(2)}_{ij,j}-2h^{(2)}_{00,j}h^{(3)}_{ii,j}-2h^{(3)}_{00,j}h^{(2)}_{ii,j}$$

$$-2h^{(2)}_{ij,k}h^{(3)}_{ij,k}+2h^{(2)}_{ii,k}h^{(3)}_{jj,k}+4h^{(2)}_{ij,k}h^{(3)}_{ik,j}-2h^{(2)}_{ii,j}h^{(3)}_{jk,k}$$

$$-2h^{(3)}_{ii,j}h^{(2)}_{jk,k}+4h^{(2)}_{0i,j}h^{(3)}_{0i,j}-4h^{(2)}_{0i,j}h^{(3)}_{0j,i}-2h^{(2)}_{00,0}h^{(2)}_{0i,i}$$

$$-4h^{(2)}_{ij,0}h^{(2)}_{0i,j}-2h^{(2)}_{00,i0}h^{(2)}_{0i}+2h^{(2)}_{ii,0}h^{(2)}_{0j,j}-2h^{(2)}_{jj,i0}h^{(2)}_{0i}\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_a m_ac^2h^{(3)}_{00}(z_a)+\sum_a m_acv_a{}^ih^{(2)}_{0i}(z_a) \qquad (5\text{-}116)$$

である．$h^{(2)}_{00}\sim h^{(3)}_{ij}$ の一般解 (5-20)，(5-21)，(5-22)，(5-28)，(5-31)，(5-32) を代入し整理すると

$$L^{(1)}=-\frac{c^4}{8\pi G}\int d^3x\partial_0(\phi_{,i}\partial_iI^{(2)})+\sum_a m_ac^2(\partial_0I^{(2)})_{x=z_a}+\sum_a m_acv_a{}^i(\partial_iI^{(2)})_{x=z_a}$$

$$=-\partial_0(\sum_a m_ac^2I^{(2)}(z_a))+\sum_a m_ac^2(\partial_0I^{(2)})_{x=z_a}+\sum_a m_acv_a{}^i(\partial_iI^{(2)})_{x=z_a}$$

$$=0 \qquad (5\text{-}117)$$

となる．ここで ϕ は (5-36) で定義された関数である．

pN 次の Lagrange 関数 $L^{(2)}$ を求めるには，(A5-2)，(A5-3)，(A5-5) で与えられる数多くの項を計算しなければならない．しかし，$h^{(2)}_{0i}$，$h^{(3)}_{00}$ そして $h^{(3)}_{ij}$ を含む項の寄与はその一般解を代入し部分積分法を駆使すると，すべて打消し合い0となることがわかる．残る項をとり出すと次のようになる．

$$L^{(2)}=\frac{c^4}{64\pi G}\int d^3x\{2h^{(2)}_{00,i}h^{(4)}_{ij,j}+2h^{(4)}_{00,i}h^{(2)}_{ij,j}-2h^{(2)}_{00,j}h^{(4)}_{ii,j}-2h^{(4)}_{00,j}h^{(2)}_{ii,j}$$

$$-2h^{(2)}_{ij,k}h^{(4)}_{ij,k}+2h^{(2)}_{ii,k}h^{(4)}_{jj,k}+4h^{(2)}_{ij,k}h^{(4)}_{ik,j}-2h^{(2)}_{ii,j}h^{(4)}_{jk,k}$$

$$-2h^{(4)}_{ii,j}h^{(2)}_{jk,k}+2h^{(3)}_{0i,j}h^{(3)}_{0i,j}-2h^{(3)}_{0i,j}h^{(3)}_{0j,i}-2h^{(2)}_{00,0}h^{(3)}_{0i,i}$$

$$-4h^{(2)}_{ij,0}h^{(3)}_{0i,j}-2h^{(2)}_{00,i0}h^{(3)}_{0i}+2h^{(2)}_{ii,0}h^{(3)}_{0j,j}-2h^{(2)}_{jj,i0}h^{(3)}_{0i}$$

$$+h^{(2)}_{ij,0}h^{(2)}_{ij,0}-h^{(2)}_{ii,0}h^{(2)}_{jj,0}+\frac{1}{2}h^{(2)}_{00}(2h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{ij,j}-2h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{jj,i}$$

$$+h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{ij,k}+2h^{(2)}_{ii,j}h^{(2)}_{jk,k}-h^{(2)}_{ii,j}h^{(2)}_{kk,j}-2h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{ik,j})$$

$$+\frac{1}{2}h^{(2)}_{ll}(2h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{ij,j}-2h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{jj,i}-h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{ij,k}+2h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{ik,j}$$

$$-2h^{(2)}_{ij,i}h^{(2)}_{kk,j}+h^{(2)}_{ii,j}h^{(2)}_{kk,j})+h^{(2)}_{ij}(2h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{kk,j}-2h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{kj,k}$$

$$+2h^{(2)}_{00,k}h^{(2)}_{ij,k}-2h^{(2)}_{00,k}h^{(2)}_{ki,j}+2h^{(2)}_{ik,l}h^{(2)}_{jk,l}-2h^{(2)}_{ik,l}h^{(2)}_{jl,k}$$

$$+2h^{(2)}_{ki,j}h^{(2)}_{ll,k}-2h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{ll,k}+2h^{(2)}_{ij,k}h^{(2)}_{kl,l}+2h^{(2)}_{kk,i}h^{(2)}_{lj,l}$$

$$-h^{(2)}_{kk,i}h^{(2)}_{ll,j}-2h^{(2)}_{kl,i}h^{(2)}_{kj,l}-2h^{(2)}_{ki,l}h^{(2)}_{kl,j}+h^{(2)}_{kl,i}h^{(2)}_{kl,j}))\}$$

$$+\sum_a m_a c^2\left\{\frac{1}{2}h^{(4)}_{00}(z_a)+\frac{v_a{}^i}{c}h^{(3)}_{0i}(z_a)+\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{2c^2}h^{(2)}_{ij}(z_a)+\frac{1}{8c^4}(v_a{}^2)^2\right.$$

$$\left.+\frac{v_a{}^2}{4c^2}h^{(2)}_{00}(z_a)+\frac{1}{8}(h^{(2)}_{00}(z_a))^2\right\} \tag{5-118}$$

(5-118) で $h^{(4)}_{ij}$ を含む項を取り出すと

$$K_1=\frac{c^4}{64\pi G}\int d^3x\{2h^{(2)}_{00,i}h^{(4)}_{ij,j}-2h^{(2)}_{00,j}h^{(4)}_{ii,j}-2h^{(2)}_{ij,k}h^{(4)}_{ij,k}+2h^{(2)}_{ii,k}h^{(4)}_{jj,k}$$

$$+4h^{(2)}_{ij,k}h^{(4)}_{ik,j}-2h^{(2)}_{ii,j}h^{(4)}_{jk,k}-2h^{(2)}_{jk,k}h^{(4)}_{ii,j}\}$$

となる．$h^{(2)}_{00}$ と $h^{(2)}_{ij}$ の一般解を代入すると

$$K_1=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\{\partial_i\partial_j\partial_k J^{(2)}\cdot h^{(4)}_{ij,k}-\triangle\,\partial_i J^{(2)}\cdot h^{(4)}_{ij,j}\}$$

となり，部分積分によって $K_1=0$ を得る．上式中の $J^{(2)}$ は $J^{(2)}_i=\frac{1}{2}\partial_i J^{(2)}$ で定義される関数で

$$J^{(2)}=yGc^{-2}\sum_a m_a r_a \tag{5-119}$$

を表わす．このように $h^{(4)}_{ij}$ は $L^{(2)}$ に直接には寄与しない．ただし $h^{(4)}_{ij}\xrightarrow[r\to\infty]{} O\left(\frac{1}{r}\right)$ の条件は必要であった．

同様に $h^{(4)}_{00}$ を含む項の寄与は

$$\begin{aligned}K_2&=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(h^{(2)}_{ij,j}h^{(4)}_{00,i}-h^{(2)}_{ii,j}h^{(4)}_{00,j})+\frac{1}{2}\sum_a m_a c^2\,h^{(4)}_{00}(z_a)\\&=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\,\triangle\phi\cdot h^{(4)}_{00}+\frac{1}{2}\sum_a m_a c^2\,h^{(4)}_{00}(z_a)\\&=0\end{aligned}$$

となる．

$h^{(3)}_{0i}$ を含む項の寄与は

$$\begin{aligned}K_3=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(&h^{(3)}_{0i,j}h^{(3)}_{0i,j}-h^{(3)}_{0i,j}h^{(3)}_{0j,i}-h^{(2)}_{00,0}h^{(3)}_{0i,i}-2h^{(2)}_{ij,0}h^{(3)}_{0i,j}\\&-h^{(2)}_{00,i0}h^{(3)}_{0i}+h^{(2)}_{ii,0}h^{(3)}_{0j,j}-h^{(2)}_{jj,i0}h^{(3)}_{0i})\\&+\sum_a m_a c v_a{}^i\,h^{(3)}_{0i}(z_a)\\=\frac{1}{2}\sum_a m_a c v_a{}^i\,&h^{(3)}_{0i}(z_a)+\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\phi_{,0}h^{(3)}_{0i,i}\\=-\frac{2G}{c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}&\frac{m_a m_b}{r_{ab}}(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)+\frac{c^4}{8\pi G}\int d^3x\phi_{,0}\phi_{,0}\end{aligned}$$

$h^{(2)}_{ij}$ の時間微分を2次で含む項は

$$\begin{aligned}K_4&=\frac{c^4}{64\pi G}\int d^3x(h^{(2)}_{ij,0}h^{(2)}_{ij,0}-h^{(2)}_{ii,0}h^{(2)}_{jj,0})\\&=-\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(3\phi_{,0}\phi_{,0}+2\phi_{,0}\cdot\triangle\partial_0 J^{(2)})\end{aligned}$$

となる．

さらに h^3 の項の寄与は一般解を代入し整理すると

$$K_5 = \frac{c^4}{64\pi G}\int d^3x\{-4\phi\phi_{,i}\phi_{,i} - \triangle J^{(2)}\cdot\phi_{,i}\phi_{,i} + 2\partial_i\partial_j J^{(2)}\cdot\phi_{,i}\phi_{,j}$$

$$+\frac{1}{2}\triangle J^{(2)}(\partial_i\partial_j\partial_k J^{(2)}\cdot\partial_i\partial_j\partial_k J^{(2)} - \triangle\partial_i J^{(2)}\cdot\triangle\partial_i J^{(2)})$$

$$+\partial_i\partial_j J^{(2)}(-3\partial_i\partial_k\partial_l J^{(2)}\cdot\partial_j\partial_k\partial_l J^{(2)} + 2\partial_i\partial_j\partial_k J^{(2)}\cdot\triangle\partial_k J^{(2)}$$

$$+\triangle\partial_i J^{(2)}\cdot\triangle\partial_j J^{(2)})\}$$

となる．部分積分法を利用することにより $(J^{(2)})^3$ の寄与は 0 となり

$$K_5 = \frac{c^4}{64\pi G}\int d^3x\{-(4+y)\phi\phi_{,i}\phi_{,i} + 2\partial_i\partial_j J^{(2)}\cdot\phi_{,i}\phi_{,j}\}$$

を得る．

以上の $K_1 \sim K_5$ をもとに，積分

$$\int d^3x\phi_{,0}\phi_{,0} = \frac{8\pi G}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b) - (\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}$$

$$\int d^3x\phi\phi_{,i}\phi_{,i} = \frac{16\pi G^3}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}$$

$$\int d^3x\partial_i\partial_j J^{(2)}\cdot\phi_{,i}\phi_{,j} = y\frac{8\pi G^3}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}$$

$$-y\frac{16\pi G^3}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})$$

を使い $L^{(2)}$ が定められる．

結果を $L^{\mathrm{PN}}(y)$ と表示すると

$$L^{\mathrm{PN}}(y) = \frac{1}{8c^2}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2 - \frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}$$

$$+\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{6\boldsymbol{v}_a{}^2 - 7(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b) - (\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}$$

$$+y\Big[\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{(\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b)^2 - (\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}$$

$$-\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\Big] \qquad (5\text{-}120)$$

である．これはパラメータ y を含んでおり，pN 次の最も一般的な Lagrange 関数である．この y 依存項は第8章で述べる S 行列の方法で，緋田と岡村によって最初に導かれた（第8章の文献[4]）．

pN 近似での多体系の運動の問題は，最初 Einstein, Infeld および Hoffmann によって，物体の運動を重力場 $g_{\mu\nu}$ の特異点の運動と考えるという独創的方法で研究されたが，その時には計量テンソルの表示を $h_{0i}^{(5)}$ まで必要とした．ここで展開した Fokker 型 Lagrange 関数の方法では，必要な計量テンソルは $h_{ij}^{(4)}$ までであるが，$h_{00}^{(4)}$ と $h_{ij}^{(4)}$ は遠方で r^{-1} よりはやく減衰すればよく，具体的表示が必要なのは $h_{00}^{(2)}$，$h_{ij}^{(2)}$，$h_{0i}^{(3)}$ だけですむ．この方法の有効性が理解されるであろう．

ここまで，pN 近似の Lagrange 関数 $L^{(0)}+L^{(1)}+L^{(2)}$ を場の方程式の最も一般的な解を用いて計算したが，その中で $I^{(2)}$ および $J_i^{(3)}$ は Lagrange 関数にまったく寄与しなかった．これは $h_{0i}^{(2)}$ と $h_{ij}^{(3)}$ に対する方程式が物体のエネルギー・運動量テンソルと結合していないことからも想定されることである．そこで以後座標条件にある制限を付け，(5-49) のように $h_{0i}^{(2)}=h_{ij}^{(3)}=0$ として高次の Lagrange 関数を計算する．

条件 (5-49) の下では

$$L^{(3)}=0 \tag{5-121}$$

となる．次に ppN 次の Lagrange 関数 $L^{(4)}$ に対して，$h_{00}^{(5)}$，$h_{ij}^{(5)}$，$h_{0i}^{(6)}$ を含む項はすべて $h_{0i}^{(2)}$，$h_{00}^{(3)}$ または $h_{ij}^{(3)}$ との積なので，条件 (5-49) の下ではこれらは全く現われない．また $h_{0i}^{(4)}$ を含む項は $h_{0i}^{(2)}$ との積，および $h_{0i,j}^{(4)}h_{0i,j}^{(4)}-h_{0i,j}^{(4)}h_{0j,i}^{(4)}$ であるが，後者は一般解 $h_{0i}^{(4)}=\partial_i I^{(4)}$ を代入すると 0 になる．さらに $h_{0i}^{(4)}$，$h_{00}^{(5)}$，$h_{ij}^{(5)}$ の一般解は $h_{0i}^{(5)}$，$h_{00}^{(6)}$ に全く寄与しないことも場の方程式からすぐ確かめられる．以上の考察から条件 (5-49) の下では，計量テンソルとして §5-1 の最後にまとめた (5-61) ～ (5-68) および (5-76) を用いて $L^{(4)}$ を計算すればよいことがわかる．

(A5-2) ～ (A5-5) より

$$L^{(4)}=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(h_{ij,j}^{(6)}h_{00,i}^{(2)}-h_{ii,j}^{(6)}h_{00,j}^{(2)}-h_{ij,k}^{(6)}h_{ij,k}^{(2)}+h_{jj,k}^{(6)}h_{ii,k}^{(2)}$$

$$+2h_{ik,j}^{(6)}h_{ij,k}^{(2)}-h_{jk,k}^{(6)}h_{ii,j}^{(2)}-h_{ii,j}^{(6)}h_{jk,k}^{(2)}+h_{00,i}^{(6)}h_{ij,j}^{(2)}$$

$$-h_{00,j}^{(6)}h_{ii,j}^{(2)}+2h_{0i,j}^{(5)}h_{0i,j}^{(3)}-2h_{0j,i}^{(5)}h_{0i,j}^{(3)}-h_{0i,i}^{(5)}h_{00,0}^{(2)}$$

$$-2h^{(5)}_{0i,j}h^{(2)}_{ij,0}-h^{(5)}_{0i}h^{(2)}_{00,i0}+h^{(5)}_{0j,j}h^{(2)}_{ii,0}-h^{(5)}_{0i}h^{(2)}_{jj,i0}+h^{(4)}_{ij,j}h^{(4)}_{00,i}$$

$$-h^{(4)}_{ii,j}h^{(4)}_{00,j}-\frac{1}{2}h^{(4)}_{ij,k}h^{(4)}_{ij,k}+\frac{1}{2}h^{(4)}_{ii,k}h^{(4)}_{jj,k}+h^{(4)}_{ij,k}h^{(4)}_{ik,j}$$

$$-h^{(4)}_{ii,j}h^{(4)}_{jk,k}-2h^{(4)}_{ij,0}h^{(3)}_{0i,j}+h^{(4)}_{ii,0}h^{(3)}_{0j,j}-h^{(4)}_{jj,i0}h^{(3)}_{0i}$$

$$+h^{(4)}_{ij,0}h^{(2)}_{ij,0}-h^{(4)}_{jj,0}h^{(2)}_{ii,0}-h^{(4)}_{00,0}h^{(3)}_{0i,i}-h^{(4)}_{00,i0}h^{(3)}_{0i})$$

$$+\int d^3x\{L_G(h^3)\text{の寄与}\}+\int d^3x\{L_G(h^4)\text{の寄与}\}$$

$$+\sum_a m_a c^2\left\{\frac{1}{2}h^{(6)}_{00}(z_a)+\frac{1}{4}h^{(4)}_{00}(z_a)h^{(2)}_{00}(z_a)\right.$$

$$+\frac{1}{16}h^{(2)}_{00}(z_a)h^{(2)}_{00}(z_a)h^{(2)}_{00}(z_a)+\frac{v_a{}^i}{c}h^{(5)}_{0i}(z_a)+\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{2c^2}h^{(4)}_{ij}(z_a)$$

$$+\frac{v_a{}^2}{4c^2}h^{(4)}_{00}(z_a)+\frac{v_a{}^2 v_a{}^i}{2c^3}h^{(3)}_{0i}(z_a)+\frac{v_a{}^2 v_a{}^i v_a{}^j}{4c^4}h^{(2)}_{ij}(z_a)$$

$$+\frac{v_a{}^i}{2c}h^{(2)}_{00}(z_a)h^{(3)}_{0i}(z_a)+\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{4c^2}h^{(2)}_{00}(z_a)h^{(2)}_{ij}(z_a)$$

$$\left.+\frac{3(v_a{}^2)^2}{16c^4}h^{(2)}_{00}(z_a)+\frac{3v_a{}^2}{16c^2}h^{(2)}_{00}(z_a)h^{(2)}_{00}(z_a)+\frac{(v_a{}^2)^3}{16c^6}\right\} \tag{5-122}$$

である．

(5-122) で $h^{(6)}_{ij}$ を含む項を取り出すと

$$M_1=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(h^{(6)}_{ij,j}h^{(2)}_{00,i}-h^{(6)}_{ii,j}h^{(2)}_{00,j}-h^{(6)}_{ij,k}h^{(2)}_{ij,k}+h^{(6)}_{jj,k}h^{(2)}_{ii,k}$$

$$+2h^{(6)}_{ik,j}h^{(2)}_{ij,k}-h^{(6)}_{jk,k}h^{(2)}_{ii,j}-h^{(6)}_{ii,j}h^{(2)}_{jk,k})$$

となり，$h^{(2)}_{00}$ および $h^{(2)}_{ij}$ の解 (5-61)，(5-62) を代入し部分積分を行うと

$$M_1=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(\partial_i\partial_j\partial_k J^{(2)}\cdot h^{(6)}_{ij,k}-\triangle\,\partial_i J^{(2)}\cdot h^{(6)}_{ij,j})$$

$$=0$$

となる．

同様に $h_{00}^{(6)}$ を含む項の寄与は

$$M_2=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(h_{00,i}^{(6)}h_{ij,j}^{(2)}-h_{00,j}^{(6)}h_{ii,j}^{(2)})+\frac{1}{2}\sum_a m_a c^2 h_{00}^{(6)}(z_a)$$

$$=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\,\triangle\phi\cdot h_{00}^{(6)}+\frac{1}{2}\sum_a m_a c^2 h_{00}^{(6)}(z_a)$$

$$=0$$

となる．

また $h_{0i}^{(5)}$ を含む項の寄与は

$$M_3=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(2h_{0i,j}^{(5)}h_{0i,j}^{(3)}-2h_{0j,i}^{(5)}h_{0i,j}^{(3)}-h_{0i,i}^{(5)}h_{00,0}^{(2)}$$

$$-2h_{0i,j}^{(5)}h_{ij,0}^{(2)}-h_{0i}^{(5)}h_{00,i0}^{(2)}+h_{0j,j}^{(5)}h_{ii,0}^{(2)}$$

$$-h_{0i}^{(5)}h_{jj,i0}^{(2)})+\sum_a m_a c v_a{}^i h_{0i}^{(5)}(z_a)$$

であるが，解 (5-61) ～ (5-63) を代入し部分積分を行って整理すると

$$M_3=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x h_{0i}^{(5)}\triangle\left(\frac{4G}{c^3}\sum_a\frac{m_a}{r_a}v_a{}^i\right)+\sum_a m_a c v_a{}^i h_{0i}^{(5)}(z_a)$$

$$=0$$

となる．このように，$h_{ij}^{(6)}$，$h_{00}^{(6)}$，$h_{0i}^{(5)}$ は遠方で r^{-1} よりはやく減衰するという条件を満足している限り，ppN 次の Lagrange 関数に寄与しない．

次に $h_{ij}^{(4)}$ の寄与を計算するが，ここではじめて加速度が現われる．(5-122) から加速度を含む項を取り出すと

$$N=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(-2h_{ij,0}^{(4)}h_{0i,j}^{(3)}+h_{ii,0}^{(4)}h_{0j,j}^{(3)}-h_{jj,i0}^{(4)}h_{0i}^{(3)}+h_{ij,0}^{(4)}h_{ij,0}^{(2)}$$

$$-h_{jj,0}^{(4)}h_{ii,0}^{(2)}-h_{00,0}^{(4)}h_{0i,i}^{(3)}-h_{00,i0}^{(4)}h_{0i}^{(3)})$$

$$=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\{h_{ij,0}^{(4)}(h_{ij,0}^{(2)}-2h_{0i,j}^{(3)})-h_{ii,0}^{(4)}(h_{jj,0}^{(2)}-2h_{0j,j}^{(3)})\} \tag{5-123}$$

となる．$h_{ij}^{(2)}$ および $h_{0j}^{(3)}$ の解から

$$h_{jj,0}^{(2)}-2h_{0j,j}^{(3)}=0 \tag{5-124}$$

が成り立つので，結局

$$N=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\, h^{(4)}_{ij,0}(h^{(2)}_{ij,0}-2h^{(3)}_{0i,j}) \tag{5-125}$$

である．

加速度項の生じる源を明らかにするために，$h^{(4)}_{ij}$ を次の形にまとめる（さしあたって$\widetilde{J}^{(4)}_i=0$ とする）

$$h^{(4)}_{ij}=\delta_{ij}F_1+\partial_i\partial_jF_2+h^{\mathrm{TT}(4)}_{ij}+F_{ij}(y). \tag{5-126}$$

ここで

$$F_1=\frac{3G^2}{2c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}-\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}+\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2$$

$$+y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})$$

$$F_2=-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\ln(r_a+r_b+r_{ab})-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\frac{r_a}{r_{ab}}$$

$$+\frac{G}{2c^4}\sum_a m_ar_a\boldsymbol{v}_a{}^2 \tag{5-127}$$

$$F_{ij}(y)=y\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_a{}^2}\{n_a{}^in_b{}^j+n_a{}^jn_b{}^i-\delta_{ij}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}$$

$$+y^2\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}\{\delta_{ij}-n_a{}^in_a{}^j-n_b{}^in_b{}^j+n_a{}^in_b{}^j(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}$$

である．

Nを計算すると，F_1 の寄与は（5-124）によって 0 であり $h^{\mathrm{TT}(4)}_{ij}$ の寄与は

$$\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\{h^{\mathrm{TT}(4)}_{ii,0}\phi_{,0}-h^{\mathrm{TT}(4)}_{ij,j0}(\partial_i\partial_0J^{(2)}-h^{(3)}_{0i})\}$$

となり，条件（5-72）によって 0 である．したがって

$$N=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x(\partial_0\partial_i\partial_jF_2+\partial_0F_{ij}(y))(h^{(2)}_{ij,0}-2h^{(3)}_{0i,j})$$

$$=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\{-2\partial_0F_2\cdot\triangle\phi_{,0}+\partial_0F_{ij}(y)(h^{(2)}_{ij,0}-2h^{(3)}_{0i,j})\} \tag{5-128}$$

となる．$F_{ij}(y)$ は速度に依存しないので加速度項は生じない．加速度項が生じるのは F_2 中の $1/2Gc^{-4}\sum_a m_ar_a\boldsymbol{v}_a{}^2$ によることがわかる．

したがって，加速度に依存しない Lagrange 関数を得るには未定関数 $\widetilde{J}^{(4)}_i$ を使っ

て $1/2Gc^{-4}\sum_a m_a(r_a)_{,ij}v_a{}^2$ を $h_{ij}^{(4)}$ から消去すればよい．しかし，単に $\widetilde{J}_i^{(4)}=-1/4Gc^{-4}\sum_a m_a n_a{}^i v_a{}^2$ としたのでは上記の項は消去されるが，条件 $\partial_0\widetilde{J}_i^{(4)}\xrightarrow[r\to\infty]{} O\left(\frac{1}{r}\right)$ が満たされない．この条件をも満たすためには

$$\widetilde{J}_i^{(4)}=-\frac{G}{4C^4}\sum_a m_a n_a{}^i v_a{}^2+\frac{G^2}{4C^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\frac{n_a{}^i}{r_{ab}}$$

としなければならない．

以上をまとめると，ppN 近似の Lagrange 関数の加速度依存性は次のようになる．

$h_{ij}^{(4)}$ の斉次方程式の解に含まれる未定関数 $\widetilde{J}_i^{(4)}$ を

$$\widetilde{J}_i^{(4)}=-\frac{G}{4C^4}\sum_a m_a n_a{}^i v_a{}^2+\frac{G^2}{4C^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\frac{n_a{}^i}{r_{ab}}+f_i^{(4)} \tag{5-129}$$

（$f_i^{(4)}$ は速度を含まない関数）

と選べば，Lagrange 関数は加速度を含まない．すなわち，(5-129) を与える一連の座標条件のもとでは，Lagrange 関数は加速度に依存しない．(5-129) 以外の $\widetilde{J}_i^{(4)}$ では ppN 近似の Lagrange 関数は加速度を1次で含む

Lagrange 関数を定めるために，加速度に依存しない場合と依存する場合と各々1つずつ具体例を考えよう．

加速度に依存しない場合として計量テンソルが最も簡単な形となる

$$y=0$$

$$\widetilde{J}_i^{(4)}=-\frac{G}{4C^4}\sum_a m_a n_a{}^i v_a{}^2+\frac{G^2}{4C^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\frac{n_a{}^i}{r_{ab}} \tag{5-130}$$

$$+\frac{G^2}{4C^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\partial_i\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

を選び，加速度に依存する場合として

$$y=0$$

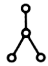
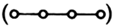
$$\widetilde{J}_i^{(4)}=\frac{G^2}{4C^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\partial_i\ln(r_a+r_b+r_{ab}) \tag{5-131}$$

を選ぶことにする．

(5-130) の場合に $h_{ij}^{(4)}$ は

$$h_{ij}^{(4)}=\delta_{ij}\left(\frac{3G^2}{2c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}-\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}+\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2\right)+h_{ij}^{\mathrm{TT}(4)} \tag{5-132}$$

である．この時は $N=0$ であることに注意し，計量テンソルの解として (5-132) および $y=0$ とした (5-61) ～ (5-64) を代入し $L^{(4)}$ を計算する．計算は大変やっかいであるが，付録 A-6 の種々の積分公式を用いて実行される．結果を L^{PPN} と表示すると

$$L^{\mathrm{PPN}}=\frac{1}{16c^4}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}_a{}^2)^3+\frac{1}{4}U\Bigl($$  $$\Bigr)+\frac{3}{8}U\bigl($$  $$\bigr)-U^{\mathrm{TT}}$$

$$+\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}\{9\boldsymbol{v}_a{}^2-7\boldsymbol{v}_b{}^2-17(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)+(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)$$

$$+(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2+16(\boldsymbol{v}_b\cdot\boldsymbol{v}_c)\}$$

$$+\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}{}^2}\{-5(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\boldsymbol{v}_c{}^2+(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{v}_c)^2$$

$$-2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{v}_c)-2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{v}_c)+14(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_c)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{v}_c)\}$$

$$-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_a m_b m_c}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})^2}\{3(\boldsymbol{n}_{ab}+\boldsymbol{n}_{ac})\cdot\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{n}_{ab}-\boldsymbol{n}_{bc})\cdot\boldsymbol{v}_b$$

$$+(\boldsymbol{n}_{ab}+\boldsymbol{n}_{ac})\cdot\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{n}_{ab}-\boldsymbol{n}_{bc})\cdot\boldsymbol{v}_a+8(\boldsymbol{n}_{ab}+\boldsymbol{n}_{ac})\cdot\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{n}_{ab}-\boldsymbol{n}_{bc})\cdot\boldsymbol{v}_c$$

$$-16(\boldsymbol{n}_{ab}+\boldsymbol{n}_{ac})\cdot\boldsymbol{v}_c(\boldsymbol{n}_{ab}-\boldsymbol{n}_{bc})\cdot\boldsymbol{v}_a+4(\boldsymbol{n}_{ab}+\boldsymbol{n}_{ac})\cdot\boldsymbol{v}_c(\boldsymbol{n}_{ab}-\boldsymbol{n}_{bc})\cdot\boldsymbol{v}_c\}$$

$$+\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_a m_b m_c}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})r_{ab}}[3\{(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}$$

$$+\{\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}-8\{(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_c)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_c)\}+4\{\boldsymbol{v}_c{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_c)^2\}]$$

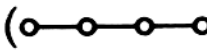
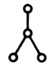
$$-\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b{}^2}{r_{ab}{}^2}\{\boldsymbol{v}_a{}^2+\boldsymbol{v}_b{}^2-2(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)\}$$

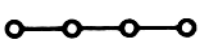
$$+\frac{G}{16c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{14(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2-28\boldsymbol{v}_a{}^2(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)$$

$$-4\boldsymbol{v}_a{}^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)+11\boldsymbol{v}_a{}^2\boldsymbol{v}_b{}^2+2(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)^2-10\boldsymbol{v}_a{}^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2$$

$$+12(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)+3(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\} \qquad (5\text{-}133)$$

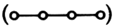
となる．

ここで記号 U() および U() は，それぞれの tree(樹木)図，

 に対応する静的ポテンシャル

U() $=\dfrac{G^3}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\sum_{d\neq a}\dfrac{m_a m_b m_c m_d}{r_{ab}r_{ac}r_{ad}}$

(5-134)

U() $=\dfrac{G^3}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq b}\sum_{d\neq c}\dfrac{m_a m_b m_c m_d}{r_{ab}r_{bc}r_{cd}}$

を表わす．U^{TT} は重力場の TT- 部から生じる静的ポテンシャルで

$$U^{\mathrm{TT}}=-\frac{c^4}{4\pi G}\int d^3x f^{\mathrm{TT}}_{ij,k}f^{\mathrm{TT}}_{ij,k} \qquad (5\text{-}135)$$

である．TT- 部が静的ポテンシャルに寄与するのは，一般相対論の非線形性の特徴である．第8章で S 行列の方法による多体重力ポテンシャルの計算を説明するが，その議論と対応させるため U^{TT} の4体ポテンシャルを f^{TT}_{ij} の $\boldsymbol{k}$ 表示 (5-75) を使って書き直しておく．

$$U^{\mathrm{TT}}(4\text{体})=-\frac{G^3}{16\pi^6c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\sum_{d\neq a,b,c}\int d^3k_1d^3k_2d^3k_3d^3k_4\delta(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)$$

$$\times e^{i\{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{z}_a)+(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{z}_b)+(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{z}_c)+(\boldsymbol{k}_4\cdot\boldsymbol{z}_d)\}}\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2\boldsymbol{k}_4{}^2\boldsymbol{k}^2}$$

$$\times\left[\left\{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_3)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_3)}{\boldsymbol{k}^2}\right\}\left\{(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_4)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_4)}{\boldsymbol{k}^2}\right\}\right.$$

$$+\left\{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_4)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_4)}{\boldsymbol{k}^2}\right\}\left\{(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_2)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_3)}{\boldsymbol{k}^2}\right\}$$

$$-\left\{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_2)}{\boldsymbol{k}^2}\right\}\left\{(\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{k}_4)-\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_3)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_4)}{\boldsymbol{k}^2}\right\}\Bigg] \tag{5-136}$$

ここで $\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2)=(\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{k}_4)$ である．

次に加速度に依存する場合の ppN 次の Lagrange 関数を（5-131）の場合に求めよう．この時 $h_{ij}^{(4)}$ は

$$h_{ij}^{(4)}=\delta_{ij}F_1+\partial_i\partial_j\widetilde{F}_2+h_{ij}^{\mathrm{TT}(4)}$$
$$\widetilde{F}_2=-\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\frac{r_a}{r_{ab}}+\frac{G}{2c^4}\sum_a m_ar_a\boldsymbol{v}_a{}^2 \tag{5-137}$$

であり，この $\widetilde{F}_2$ の寄与 $L_1(\boldsymbol{\alpha})$ が加速度を含む．$L^{(4)}$ の表示（5-122）から $\widetilde{F}_2$ の寄与を取り出すと

$$L_1(\boldsymbol{\alpha})=\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\{2(\triangle\widetilde{F}_2)\partial_0{}^2\phi+(\partial_i\partial_j\widetilde{F}_2)\cdot\partial_i\phi\cdot\partial_j\phi-\frac{1}{2}(\triangle\widetilde{F}_2)\cdot\partial_i\phi\cdot\partial_i\phi\}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_a m_av_a{}^iv_a{}^j(\partial_i\partial_j\widetilde{F}_2)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}_a}-\frac{c^4}{16\pi G}\partial_0\int d^3x\{(\triangle\widetilde{F}_2)\partial_0\phi\} \tag{5-138}$$

である．ここで右辺の第 3 項は時間についての全微分であり，運動方程式に寄与しないので Lagrange 関数の計算では除くことができる．(5-137) を代入し計算した結果は

$$L_1(\boldsymbol{\alpha})=\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{c\neq a}\sum_{d\neq c}m_am_cm_d\left(\boldsymbol{\alpha}_a+G\sum_{b\neq a}\frac{m_b\boldsymbol{n}_{ab}}{r_{ab}{}^2}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{n}_{ac}}{r_{cd}}$$
$$-\frac{G}{4c^4}\sum_a\sum_{c\neq a}m_am_c\left(\boldsymbol{\alpha}_a+G\sum_{b\neq a}\frac{m_b\boldsymbol{n}_{ab}}{r_{ab}{}^2}\right)\cdot\boldsymbol{n}_{ac}\boldsymbol{v}_c{}^2 \tag{5-139}$$

となる．

以上をまとめると，条件（5-130）の場合 ppN 近似の Lagrange 関数 L は（5-115），(5-120）および（5-133）より

$$L=-\sum_a m_ac^2+\frac{1}{2}\sum_a m_a\boldsymbol{v}_a{}^2+\frac{1}{8c^2}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2$$
$$+\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}}-\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_am_bm_c}{r_{ab}r_{ac}}$$

$$+\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{6\boldsymbol{v}_a{}^2-7(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}+L^{\mathrm{ppN}}$$

(5-140)

である．また条件 (5-131) の場合の加速度に依存する Lagrange 関数 $L(\boldsymbol{\alpha})$ は (5-139) と (5-140) より

$$L(\boldsymbol{\alpha})=L+L_1(\boldsymbol{\alpha}) \tag{5-141 a}$$

となる．(5-139) の表示からすぐ次のことに気がつく．すなわち，Lagrange 関数 $L(\boldsymbol{\alpha})$ で Newton 近似の運動方程式を使うと $L(\boldsymbol{\alpha})$ は L に一致する．もちろん，Lagrange 関数の中で運動方程式を使うことは本来許されない．簡単のために2体系の場合に $L(\boldsymbol{\alpha})$ から定まる運動方程式を求め，反復法によって書き直すと

$$0=\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dL(\boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_1{}^i}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{dL(\boldsymbol{\alpha})}{dv_1{}^i}\right)+\frac{dL(\boldsymbol{\alpha})}{dz_1{}^i}$$

$$=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_1{}^i}\right)+\frac{\partial L}{\partial z_1{}^i}+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\alpha})}{d\alpha_1{}^i}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\alpha})}{dv_1{}^i}\right)+\frac{\partial L_1(\boldsymbol{\alpha})}{\partial z_1{}^i}$$

より

$$\frac{\partial L}{\partial z_1{}^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_1{}^i}\right)-\frac{3G^3}{4c^4}\frac{m_1{}^2m_2{}^2}{r_{12}{}^4}n_{12}{}^i-\frac{G^3}{4c^4}\frac{m_1{}^3m_2}{r_{12}{}^4}n_{12}{}^i+\frac{G^2}{2c^4}\frac{m_1m_2{}^2}{r_{12}{}^3}n_{12}{}^i\boldsymbol{v}_2{}^2$$

$$+\frac{G^2}{4c^4}\frac{m_1{}^2m_2}{r_{12}{}^3}[-4(v_1{}^i-v_2{}^i)(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{v}_1)+2n_{12}{}^i(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+8n_{12}{}^i\{\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\}^2$$

$$+10n_{12}{}^i(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)]$$

$$+\frac{G}{4c^4}\frac{m_1m_2}{r_{12}{}^2}\{2(v_1{}^i-v_2{}^i)\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)$$

$$+n_{12}{}^i(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2-3n_{12}{}^i\boldsymbol{n}_{12}\cdot(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\}\boldsymbol{v}_2{}^2+O(c^{-6})=0 \tag{5-141 b}$$

となり，L によって定まる運動方程式 $\dfrac{\partial L}{\partial z_1{}^i}-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial v_1{}^i}\right)=0$ と異なる．

ところで，$L(\boldsymbol{\alpha})$ と L の違いは場の方程式の斉次方程式の解に含まれる未定関数 $\widetilde{J}_i^{(4)}$ の選び方の違いに起因するものであった．すなわち座標条件の違いによる．このことは，結局，Lagrange 関数の中で運動方程式を使うことは座標変換と等価であることを意味する．これは一般座標変換に基礎を置く一般相対論の特徴である．

以下でこの事を証明しておこう[5].

加速度に依存するLagrange関数$L(\boldsymbol{\alpha})$を次の形におく.

$$L(\boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ \boldsymbol{\alpha}_a,\ t)=L_0(\boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ t)+\varepsilon L_1(\boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ \boldsymbol{\alpha}_a,\ t) \tag{5-142}$$

ここでεは無限小のパラメータとする. そして, 空間座標$\boldsymbol{x}$に対する無限小の座標変換

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ \boldsymbol{\alpha}_a,\ t) \tag{5-143}$$

を考える. 理論の一般共変性より$L'(\boldsymbol{z}'_a,\ \boldsymbol{v}'_a,\ \boldsymbol{\alpha}'_a,\ t)=L(\boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ \boldsymbol{\alpha}_a,\ t)$であり, εの1次の量まで考慮すると

$$\begin{aligned}L'(\boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ \boldsymbol{\alpha}_a,\ t)&=L(\boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ \boldsymbol{\alpha}_a,\ t)+\varepsilon\sum_b\left(\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{z}_b}\cdot\boldsymbol{f}_b+\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{v}_b}\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{f}_b\right)\\&=L+\varepsilon\sum_b\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{v}_b}\cdot\boldsymbol{f}_b\right)+\left(\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{z}_b}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \boldsymbol{v}_b}\right)\cdot\boldsymbol{f}_b\right\}\end{aligned} \tag{5-144}$$

となる. ここで$\boldsymbol{f}_b$はInfeldのδ関数によって$\boldsymbol{f}_b=\int d^3x\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{z}_a\cdots)$で定義される. (5-144) の右辺第2項中の時間の全微分項は運動方程式に寄与しない. 残る項で$\boldsymbol{f}_b$にかかる因子は低次の運動方程式の形をしている. したがって, L_1が加速度を1次で含む場合には, $\boldsymbol{f}_b$すなわち$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{z}_a\cdots)$を適切に選ぶことにより$L'$が加速度を含まないようにすることができる. それは, まさにL中の加速度を運動方程式を使って書き直したものに等しい. ただし, 注意しなければならない点は, 加速度項を消去する$\boldsymbol{f}_b$を定めたとしても, それと矛盾なく座標変換の関数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}\ ;\ \boldsymbol{z}_a\cdots)$を定められるとは限らないこと, およびこの座標変換 (5-143) が無限遠方での時空の平坦性を保持しなければならないことの2つである. この節で取扱った加速度依存項 (5-139) に対しては$\varepsilon=c^{-4}$として

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\frac{G^2}{4}\sum_a\sum_{c\neq a}\frac{\boldsymbol{n}_a}{r_{ac}}-\frac{G}{4}\sum_a m_a\boldsymbol{n}_a v_a{}^2 \tag{5-145}$$

であり, またこの$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$は条件 (5-2) を満足する.

この節の議論から, ppN近似のLagrange関数の最も簡明な表示は (5-140) であることがわかる. そしてこのLagrange関数に対応する計量テンソルは条件 (5-49) と (5-130) を満足するものであった. これらの条件を満足する座標条件の1つとして, ADM (Arnowitt, Deser, Misner) ら3人によって与えられた

$$\triangle g_{ij,j}-\frac{1}{4}g_{jk,ijk}-\frac{1}{4}\triangle g_{jj,i}=0$$
$$\pi^{ii}=0 \tag{5-146}$$

がある[6]．これは正準形式の重力理論の一連の論文の中で使われた座標条件の1つであり，π^{ij} は g_{ij} の共役運動量である．正準形式の理論についてはあらためて第6章で論じるが，座標条件（5-146）のもとでの計量テンソルは付録A-7にまとめられている[7]．

§5-4　2体系の Lagrange 関数と Hamilton 関数

具体的な運動方程式の問題として興味があるのは2体系の場合なので，ここで2体系の Lagrange 関数と Hamilton 関数とを与えておく．pN 近似での最も一般的な Lagrange 関数は（5-115）と（5-120）より

$$\begin{aligned}
L=&-\sum_a m_a c^2+\frac{1}{2}\sum_a m_a \boldsymbol{v}_a{}^2+\frac{1}{8c^2}\sum_a m_a(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2+\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\\
&+\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{6\boldsymbol{v}_a{}^2-7(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}\\
&-\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}\\
&+y\left[\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{(\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{v}_b)^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}\right.\\
&\left.-\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\right]
\end{aligned}\tag{5-147}$$

であり，Hamilton 関数は

$$\begin{aligned}
H=&\sum_a(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)-L\\
=&\sum_a m_a c^2+\frac{1}{2}\sum_a\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}-\frac{1}{8c^2}\sum_a m_a\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}\right)^2-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\\
&+\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left[-(3+y)\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}\right)\right.\\
&+y\left\{\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)^2}{m_a{}^2}+\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_b{}^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$+(7+2y)\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+(1-2y)\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\Bigg]$$

$$+\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}+y\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})$$

(5-148)

となる．ここで $\boldsymbol{p}_a$ は $\boldsymbol{z}_a$ に正準共役な運動量で

$$\boldsymbol{p}_a=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}$$

$$=m_a\boldsymbol{v}_a+\frac{1}{2c^2}m_a\boldsymbol{v}_a{}^2\boldsymbol{v}_a+\frac{G}{2c^2}\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{6\boldsymbol{v}_a-7\boldsymbol{v}_b-\boldsymbol{n}_{ab}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}$$

$$+y\frac{G}{c^2}\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{(\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{v}_b)-\boldsymbol{n}_{ab}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\} \qquad (5\text{-}149)$$

で与えられる．なお§5-1の最後で述べたように，de Donder 座標条件においても pN 近似までであれば Fokker 型の Lagrange 関数を定めることができ，その答は (5-147) で $y=0$ としたものである．

したがって 2 体系の最も一般的な Lagrange 関数は，$r=r_{12}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_{12}$ とすると，

$$L(1,2)=-m_1c^2-m_2c^2+\frac{m_1}{2}\boldsymbol{v}_1{}^2+\frac{m_2}{2}\boldsymbol{v}_2{}^2+\frac{m_1}{8c^2}(\boldsymbol{v}_1{}^2)^2+\frac{m_2}{8c^2}(\boldsymbol{v}_2{}^2)^2$$

$$+\frac{Gm_1m_2}{r}+\frac{Gm_1m_2}{2c^2r}\{3(\boldsymbol{v}_1{}^2+\boldsymbol{v}_2{}^2)-7(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)\}$$

$$-(1+y)\frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}+y\frac{Gm_1m_2}{2c^2r}\{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)^2\}$$

(5-150)

Hamilton 関数は

$$H(1,2)=m_1c^2+m_2c^2+\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{2m_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{2m_2}-\frac{(\boldsymbol{p}_1{}^2)^2}{8c^2m_1{}^3}-\frac{(\boldsymbol{p}_2{}^2)^2}{8c^2m_2{}^3}-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$+\frac{Gm_1m_2}{2c^2r}\Bigg[-(3+y)\left(\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{m_1{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{m_2{}^2}\right)+y\left\{\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)^2}{m_1{}^2}+\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)^2}{m_2{}^2}\right\}$$

$$+(7+2y)\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1m_2}+(1-2y)\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1m_2}\Bigg]$$

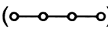
$$+(1+y)\frac{G^2 m_1 m_2(m_1+m_2)}{2c^2 r^2} \tag{5-151}$$

となる．ここに含まれるパラメーター y が観測量にどのようにかかわるかは第7章で論じる．

前節で調べたように，ppN 近似においては一般的 Lagrange 関数は加速度やパラメータを含み複雑になる．最もシンプルな Lagrange 関数は条件（5-49）と（5-130），または座標条件（5-146）のもとで定められた．このとき Hamilton 関数は

$$H=\sum_a m_a c^2+\frac{1}{2}\sum_a \frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}-\frac{1}{8c^2}\sum_a m_a\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}\right)^2+\frac{1}{16c^4}\sum_a m_a\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}\right)^3-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}$$
$$+\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left\{-3\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}\right)+7\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\right\}$$
$$+\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}+U(G^3)+U(G^2p^2)+U(Gp^4) \tag{5-152}$$

となる．ここで

$U(G^3)=-\frac{1}{4}U\Big($  $\Big)-\frac{3}{8}U($  $)+U^{\mathrm{TT}}$　　(5-153)

$$U(G^2p^2)=\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}\left\{18\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+14\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}-2\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_b{}^2}\right.$$
$$-50\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+17\frac{(\boldsymbol{p}_b\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_b m_c}-14\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}$$
$$\left.+14\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_b m_c}+(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_b m_c}\right\}$$
$$+\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}{}^2}\left\{2\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_a m_c}+2\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_b m_c}\right.$$
$$\left.+5(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\frac{\boldsymbol{p}_c{}^2}{m_c{}^2}-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\frac{(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)^2}{m_c{}^2}-14\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_c{}^2}\right\}$$
$$+\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_a m_b m_c}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})^2}(n_{ab}{}^i+n_{ac}{}^i)(n_{ab}{}^j-n_{bc}{}^j)$$
$$\times\left(8\frac{p_{ai}p_{cj}}{m_a m_c}-16\frac{p_{aj}p_{ci}}{m_a m_c}+3\frac{p_{ai}p_{bj}}{m_a m_b}+4\frac{p_{ci}p_{cj}}{m_c{}^2}+\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a{}^2}\right)$$

$$+\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_am_bm_c}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})r_{ab}}\left\{8\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_c)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_am_c}\right.$$

$$\left.-3\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_am_b}-4\frac{\boldsymbol{p}_c{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)^2}{m_c{}^2}-\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)^2}{m_a{}^2}\right\}$$

$$+\frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b{}^2}{r_{ab}{}^2}\left\{\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}-2\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_am_b}\right\} \tag{5-154}$$

$$U(Gp^4)=\frac{G}{16c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}}\left\{10\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^4}-11\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_a{}^2m_b{}^2}\right.$$

$$-2\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_a{}^2m_b{}^2}+10\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_a{}^2m_b{}^2}$$

$$\left.-12\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a{}^2m_b{}^2}-3\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_a{}^2m_b{}^2}\right\}$$

$$\tag{5-155}$$

である．

重力場のTT-部からの静的ポテンシャルへの寄与 U^{TT} の積分は計算が困難で一般の場合にはまだ求められていないが，2体，3体については次のようになる．

$$U^{\mathrm{TT}}_{(2)}=-\frac{G^3}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a{}^2m_b{}^2}{r_{ab}{}^3} \tag{5-156}$$

$$U^{\mathrm{TT}}_{(3)}=-\frac{G^3}{64c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_a{}^2m_bm_c}{r_{ab}{}^3r_{ac}{}^3r_{bc}}\{18r_{ab}{}^2r_{ac}{}^2-24r_{ab}r_{ac}{}^3$$

$$+6r_{ac}{}^4+56r_{ac}{}^3r_{bc}-24r_{ab}r_{ac}{}^2r_{bc}-60r_{ac}{}^2r_{bc}{}^2$$

$$+60r_{ab}r_{ac}r_{bc}{}^2-72r_{ac}r_{bc}{}^3+35r_{bc}{}^4\} \tag{5-157}$$

この計算については付録A-8で説明される[8]．

以上のことから，座標条件 (5-146) のもとでの2体系のLagrange関数とHamilton関数は

$$L(1,2)=-m_1c^2-m_2c^2+\frac{m_1}{2}\boldsymbol{v}_1{}^2+\frac{m_2}{2}\boldsymbol{v}_2{}^2+\frac{m_1}{8c^2}(\boldsymbol{v}_1{}^2)^2+\frac{m_2}{8c^2}(\boldsymbol{v}_2{}^2)^2$$

$$+\frac{m_1}{16c^4}(\boldsymbol{v}_1{}^2)^3+\frac{m_2}{16c^4}(\boldsymbol{v}_2{}^2)^3+\frac{Gm_1m_2}{r}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{G^2 m_1 m_2(m_1+m_2)}{2c^2 r^2}+\frac{G^3 m_1 m_2(m_1{}^2+m_2{}^2+5m_1 m_2)}{4c^4 r^3}\\
&+\frac{Gm_1 m_2}{2c^2 r}\{3(\boldsymbol{v}_1{}^2+\boldsymbol{v}_2{}^2)-7(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)\}\\
&+\frac{G^2 m_1 m_2{}^2}{8c^4 r^2}\{18\boldsymbol{v}_1{}^2+13\boldsymbol{v}_2{}^2-34(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+15(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)^2\}\\
&+\frac{G^2 m_1{}^2 m_2}{8c^4 r^2}\{13\boldsymbol{v}_1{}^2+18\boldsymbol{v}_2{}^2-34(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+15(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2\}\\
&-\frac{G^2 m_1 m_2(m_1+m_2)}{4c^4 r^2}\{\boldsymbol{v}_1{}^2+\boldsymbol{v}_2{}^2-2(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)\}\\
&+\frac{Gm_1 m_2}{8c^4 r}[7\{(\boldsymbol{v}_1{}^2)^2+(\boldsymbol{v}_2{}^2)^2\}-14(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{v}_1{}^2+\boldsymbol{v}_2{}^2)\\
&-2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{v}_1{}^2+\boldsymbol{v}_2{}^2)+11\boldsymbol{v}_1{}^2\boldsymbol{v}_2{}^2+2(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)^2\\
&-5\{\boldsymbol{v}_1{}^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)^2+\boldsymbol{v}_2{}^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2\}+12(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)\\
&+3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)^2] \qquad (5\text{-}158)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(1,2)=&\ m_1c^2+m_2c^2+\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{2m_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{2m_2}-\frac{(\boldsymbol{p}_1{}^2)^2}{8c^2m_1{}^3}\\
&-\frac{(\boldsymbol{p}_2{}^2)^2}{8c^2m_2{}^3}+\frac{(\boldsymbol{p}_1{}^2)^3}{16c^4m_1{}^5}+\frac{(\boldsymbol{p}_2{}^2)^3}{16c^4m_2{}^5}\\
&-\frac{Gm_1m_2}{r}+\frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}-\frac{G^3m_1m_2(m_1{}^2+m_2{}^2+5m_1m_2)}{4c^4r^3}\\
&+\frac{Gm_1m_2}{2c^2r}\left\{-3\left(\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{m_1{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{m_2{}^2}\right)+7\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1m_2}+\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1m_2}\right\}\\
&+\frac{G^2m_1m_2{}^2}{4c^4r^2}\left(10\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{m_1{}^2}+19\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{m_2{}^2}\right)+\frac{G^2m_1{}^2m_2}{4c^4r^2}\left(19\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{m_1{}^2}+10\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{m_2{}^2}\right)\\
&-\frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{4c^4r^2}\left\{27\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1m_2}+6\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1m_2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{Gm_1m_2}{8c^4r}\left[5\left\{\left(\frac{\boldsymbol{p}_1^{\,2}}{m_1^{\,2}}\right)^2+\left(\frac{\boldsymbol{p}_2^{\,2}}{m_2^{\,2}}\right)^2\right\}-11\frac{\boldsymbol{p}_1^{\,2}\boldsymbol{p}_2^{\,2}}{m_1^{\,2}m_2^{\,2}}-2\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)^2}{m_1^{\,2}m_2^{\,2}}\right.$$

$$+5\frac{\boldsymbol{p}_1^{\,2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)^2+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)^2\boldsymbol{p}_2^{\,2}}{m_1^{\,2}m_2^{\,2}}-12\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1^{\,2}m_2^{\,2}}$$

$$\left.-3\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_1)^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}_2)^2}{m_1^{\,2}m_2^{\,2}}\right] \tag{5-159}$$

で与えられる.

§5-5 スピン-軌道およびスピン-スピン相互作用

この節では自転角運動量(スピン)に伴う重力的スピン-軌道およびスピン-スピン相互作用を求める. 連星パルサーのような天体の運動の解析にはこの相互作用の影響を考慮に入れる必要がある. スピンに伴う重力相互作用を求めるには, 第8章で述べるS行列による方法をたとえばスピン1/2のDirac粒子の場合に応用して計算することもできるが[9], ここではLandau-Lifshitzによる素朴な導き方を説明しよう[10].

自転している物体（質量 m_A）を構成要素（質量 dm_a）に分けて考える. その構成要素の系に対するLagrange関数はpN近似で（5-147）で与えられるとし, 構成要素について加え合わせる. そのさい, 同じ物体内の構成要素の対についての和はくりこまれるものと考えて無視する. 具体的にはLagrange関数（5-147）において次のような置き換えを行う.

$$\sum_a m_a \longrightarrow \sum_A \int_{a\in A} dm_a, \quad \sum_a \sum_{b\neq a} m_a m_b \longrightarrow \sum_A \sum_{B\neq A} \int_{a\in A} dm_a \int_{b\in B} dm_b \tag{5-160}$$

$$\boldsymbol{z}_a \longrightarrow \boldsymbol{z}_A+\boldsymbol{\rho}_a, \quad \boldsymbol{v}_a \longrightarrow \boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}_A\times\boldsymbol{\rho}_a \tag{5-161}$$

ここで $\boldsymbol{z}_A$ は物体の慣性中心の座標, $\boldsymbol{\rho}_a$ は要素 dm_a の $\boldsymbol{z}_A$ に相対的な座標, $\boldsymbol{v}_A$ は物体の慣性中心の速度, $\boldsymbol{\omega}_A$ は自転の角速度を表わす. さらに簡単化のため物体は球対称であるとし, また $1/r_{ab}$ は

$$\frac{1}{r_{ab}} \longrightarrow \frac{1}{r_{AB}}\left[1-\frac{\boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{\rho}_a-\boldsymbol{\rho}_b)}{r_{AB}}+\frac{3\{\boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{\rho}_a-\boldsymbol{\rho}_b)\}^2-(\boldsymbol{\rho}_a-\boldsymbol{\rho}_b)^2}{2r_{AB}^{\,2}}+\cdots\right] \tag{5-162}$$

と多重極展開で置き換える.

(5-147) の相互作用項から生じる ω 依存項は，積分を実行し多重極展開の高次項の寄与を無視すると次のようになる：

$$
\begin{aligned}
&L_{\text{int}}(\omega)\\
&=\frac{G}{4c^2}\sum_A\sum_{B\neq A}\left(\frac{1}{r_{AB}}(m_A I_B \boldsymbol{\omega}_B{}^2+m_B I_A \boldsymbol{\omega}_A{}^2)\right.\\
&\quad+\frac{3}{r_{AB}{}^2}\{m_A I_B \boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_B\times\boldsymbol{\omega}_B)-m_B I_A \boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A\times\boldsymbol{\omega}_A)\}\\
&\quad-\frac{4}{r_{AB}{}^2}\{m_A I_B \boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A\times\boldsymbol{\omega}_B)-m_B I_A \boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_B\times\boldsymbol{\omega}_A)\}\\
&\quad-\frac{2I_A I_B}{r_{AB}{}^3}\{3(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{\omega}_A)(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{\omega}_B)-(\boldsymbol{\omega}_A\cdot\boldsymbol{\omega}_B)\}\\
&\quad+\frac{y}{2r_{AB}}[m_A I_B\{(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{\omega}_B)^2+\boldsymbol{\omega}_B{}^2\}+m_B I_A\{(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{\omega}_A)^2+\boldsymbol{\omega}_A{}^2\}]\\
&\quad\left.-\frac{yI_A I_B}{4r_{AB}{}^3}\{3(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{\omega}_A)^2-\boldsymbol{\omega}_A{}^2+3(\boldsymbol{n}_{AB}\cdot\boldsymbol{\omega}_B)^2-\boldsymbol{\omega}_B{}^2\}\right). \qquad (5\text{-}163)
\end{aligned}
$$

ここで I_A は物体の自転軸のまわりの慣性モーメントで

$$\int_{a\in A} dm_a \rho_a{}^i \rho_a{}^j=\frac{1}{2}\delta^{ij} I_A \qquad (5\text{-}164)$$

で与えられる．

$\boldsymbol{s}_A=I_A\boldsymbol{\omega}_A$ を物体の自転角運動量(スピン)として，(5-163) からスピン-軌道 (S-O) 相互作用，およびスピン-スピン (S-S) 相互作用を取り出すと

$$
\begin{aligned}
L_{\text{S-O}}=\frac{G}{c^2}\sum_A\sum_{B\neq A}\frac{1}{r_{AB}{}^2}&\left\{\frac{3}{4}m_A\boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_B\times\boldsymbol{s}_B)-\frac{3}{4}m_B\boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A\times\boldsymbol{s}_A)\right.\\
&\left.-m_A\boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A\times\boldsymbol{s}_B)+m_B\boldsymbol{n}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_B\times\boldsymbol{s}_A)\right\} \qquad (5\text{-}165)
\end{aligned}
$$

$$L_{\text{S-S}}=-\frac{G}{2c^2}\sum_A\sum_{B\neq A}\frac{1}{r_{AB}{}^3}\{3(\boldsymbol{s}_A\cdot\boldsymbol{n}_{AB})(\boldsymbol{s}_B\cdot\boldsymbol{n}_{AB})-(\boldsymbol{s}_A\cdot\boldsymbol{s}_B)\} \qquad (5\text{-}166)$$

となる．(5-163) 中の $\boldsymbol{\omega}_A{}^2$ すなわち $\boldsymbol{s}_A{}^2$ に比例する項はスピンの自己相互作用に由来するものと考えられる．

特に2体系の場合には

$$L_{\text{S-O}}(1,2)=\frac{2G}{c^2r^2}\left\{\frac{3}{4}m_1\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{s}_2)-\frac{3}{4}m_2\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{s}_1)\right.$$
$$\left.-m_1\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{s}_2)+m_2\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{s}_1)\right\} \tag{5-167}$$

$$L_{\text{S-S}}(1,2)=-\frac{G}{c^2r^3}\{3(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2)\} \tag{5-168}$$

となり，Hamilton 関数においては

$$H_{\text{S-O}}(1,2)=\frac{2G}{c^2r^2}\left\{\frac{3m_2}{4m_1}\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}_1)-\frac{3m_1}{4m_2}\boldsymbol{s}_2\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}_2)\right.$$
$$\left.-\boldsymbol{s}_1\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}_2)+\boldsymbol{s}_2\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}_1)\right\} \tag{5-169}$$

$$H_{\text{S-S}}(1,2)=\frac{G}{c^2r^3}\{3(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2)\} \tag{5-170}$$

となる．

最後に，このスピン-軌道相互作用およびスピン-スピン相互作用はパラメータ y に無関係であることを注意しておく．

第6章　重力場の正準理論とその応用

Newton 力学から素粒子の場の理論に到るまで，系の力学（dynamics）を記述するのに用いられて来た正準形式は，特に理論の量子化において大きな役割をはたした．一般相対論を正準形式で定式化することは，明白に時間座標と空間座標を識別するので理論の基礎となっている一般座標変換と相入れないと思われるかもしれないが，重力場の量子化への１つの有力な手がかりである．重力場の正準理論は Bergmann, Dirac, ADM（Arnowitt, Deser, Misner）らによって進められた．多体粒子系の力学に対しては ADM の方法が最も適切なので，以下これについて解説する［1］．それによって多体系の Hamilton 関数を ppN 近似で求め，また重力輻射による反作用力について議論する．最後に，量子宇宙論において用いられる Wheeler-De Witt 方程式について簡単に述べる．

§6-1　ADM の定式化

通常の力学系においては，力学変数およびその時間に関する１階微分の初期値を決めれば，変数のその後の時間的発展は決定される．ところが，一般相対論においては，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ で表わされる重力場は初期値を決めてもその後の任意の時刻に一般座標変換によって修正できる．この修正は単にパラメータのラベルのつけ方を変えるだけなので物理量のオブザーバブルな変化を含まないはずである．重力場の理論の正準形式への定式化において最も重要なことは，重力場を力学的（dynamical）な情報を担う部分と，座標系を特徴づける部分とに分離することである．そしてまた重力場においては恒等式(3-63)の存在することが問題を複雑にしている．

正準形式理論の特徴は次の２点にある．

（A）正準方程式は時間の１階微分に関して線形である．

（B）時間が特別扱いになり，理論は明白に 3+1 次元形式となる．

この特徴(A)を最初から取り入れるには，Lagrange 関数が力学変数の時間に関す

る1階微分について線形であると都合がよい．重力場の作用関数の場合，これは Palatini の Lagrange 関数で次のように与えられる．

$$I = \frac{1}{c}\int d^4xL$$

$$= -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,R = -\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma). \quad (6\text{-}1)$$

ここで

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = -\partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\nu \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda} + \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda}) + \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \quad (6\text{-}2)$$

である*)．これは形の上では(5-81)と同じであるが，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ と affine 係数 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ は独立な変数で，両者の間にはまだ何の関係もない（ただし $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$）．Lagrange 関数は $g_{\mu\nu}$，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$，$\partial_0\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の関数で時間微分について1階微分のみを含み，しかもそれに関して線形である．$g_{\mu\nu}$ と $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の変分は独立にとられ，$g_{\mu\nu}$ の変分から

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (6\text{-}3)$$

$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の変分から

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}) + \sqrt{-g}\,(g^{\mu\rho}\Gamma^\nu{}_{\rho\lambda} + g^{\nu\rho}\Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^\rho{}_{\rho\lambda}) = 0 \quad (6\text{-}4)$$

が導かれる．この(6-4)は書き換えると Christoffel シンボルの定義式(3-22)となる．(6-3)と(6-4)とを合わせて Einstein の場の方程式となっている．

次に Lagrange 関数(6-1)に含まれる変数の，3次元空間の量としての性質を調べるために特徴(B)を利用する．すなわち，全空間を $x^0 =$ 一定の超曲面の層に分け，その超曲面内の座標変換

$$\begin{aligned} x^0 &\longrightarrow x'^0 = x^0 \\ x^i &\longrightarrow x'^i = f^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (6\text{-}5)$$

を考える．この座標変換のもとでの $g_{\mu\nu}$ および $g^{\mu\nu}$ の変換性を調べると

$$g_{ij} = {}^4g_{ij},\quad N_0 = (-{}^4g^{00})^{-1/2},\quad N_i = {}^4g_{0i} \quad (6\text{-}6)$$

が明白な変換性を有している．具体的には，g_{ij} は3次元の共変テンソル，N_0 は3次元のスカラーであり，そして N_i の変換規則は複雑だがもし(6-5)の f^i が x^0 を

---

*) 本書で用いる曲率テンソル $R^\rho{}_{\lambda\nu\mu}$ は ADM の原論文で使われているものと同じであるが，Ricci テンソルは $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda}$ と定義しているので符号が反対である．

含まなければ3次元の共変ベクトルである．この章では今まで用いて来た4次元空間の量については ${}^4g_{ij}$ のように prefix“4”をつけて表示する．prefix“4”のついていない量はすべて3次元空間の量と考え，その添字の上げ下げは g_{ij} とその逆行列 g^{ij} によって行うことにする*)．計量テンソルの他の成分は(6-6)の10個の量を使って

$$ {}^4g_{00}=-(N_0{}^2-N_iN^i),\quad {}^4g^{0i}=N^i/N_0{}^2,\quad {}^4g^{ij}=g^{ij}-N^iN^j/N_0{}^2 \tag{6-7}$$

と表わされる．また

$$\sqrt{-{}^4g}=N_0\sqrt{g}\,,\quad g=\det g_{ij} \tag{6-8}$$

である．

Christoffel シンボル ${}^4\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ については，$\Gamma^0{}_{ij}={}^4\Gamma^0{}_{ij}$ が3次元の共変テンソルであるが他の成分は複雑な変換性を示す．そこで $\Gamma^0{}_{ij}$ 以外の34個の成分は g_{ij}, N_0, N_i および $\Gamma^0{}_{ij}$ の16個の量で書き表わすことにする．具体的には ${}^4\Gamma^k{}_{ij}, {}^4\Gamma^k{}_{0i}$, ${}^4\Gamma^0{}_{0i}$ の30個については，関係式(6-4)の $\lambda=1,2,3$ の時間微分を含まない30個の関係を利用し，${}^4\Gamma^i{}_{00}$，${}^4\Gamma^0{}_{00}$ の4個については(6-4)の $\lambda=0$，$\nu=0$ の関係式を利用して書き直す．もともと Lagrange 関数には ${}^4\Gamma^{\mu}{}_{00}$ の時間微分は含まれておらず ${}^4\Gamma^{\mu}{}_{00}$ は力学変数とは見なせないので，最後に利用した関係式は ${}^4g_{\mu\nu}$ についての時間微分を含むが，${}^4\Gamma^{\mu}{}_{00}$ の定義式と考えてよい．((6-1)～(6-4)の関係式中の量には prefix“4”がついていることに注意する．)

以上の結果，Palatini の Lagrange 関数は16個の独立な量 $g_{ij}, N_0, N_i, \Gamma^0{}_{ij}$ で表わされる．$\Gamma^0{}_{ij}$ の代りに

$$\pi^{ij}=N_0\sqrt{g}\,(\Gamma^0{}_{mn}-\Gamma^0{}_{rs}\ g^{rs}g_{mn})g^{im}g^{jn} \tag{6-9}$$

を用いると，作用関数(6-1)はていねいな計算の後

$$I=\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\left\{-g_{ij}\partial_0\pi^{ij}+N_0R^0+N_iR^i-2\partial_i\left(\pi^{ij}N_j-\frac{1}{2}g_{mn}\pi^{mn}N^i+N_0{}^{|i}\sqrt{g}\,\right)\right\} \tag{6-10}$$

となる．(幾何学的導出は付録A-9にある) ここで

$$R^0=g^{-1/2}\left\{-gR+\frac{1}{2}(g_{ij}\pi^{ij})^2-\pi^{ij}\pi_{ij}\right\} \tag{6-11}$$

$$R^i=2\pi^{ij}{}_{|j} \tag{6-12}$$

---

*) 上ツキと下ツキの同じ3次元の添字については1から3までの和をとるものとする．

であり，R は g_{ij} および g^{ij} から作られる3次元のスカラー曲率，記号“|”は3次元の共変微分を表わす*)．I の表示を見ると N_0 および N_i の時間微分項は存在しないので，これらは Lagrange の未定乗数の役割をはたす．

作用関数(6-10)は時間の全微分項を加え，3次元発散を除くと

$$I=\frac{c^3}{16\pi G}\int d^4x\{\pi^{ij}\partial_0 g_{ij}+N_0R^0+N_iR^i\} \tag{6-13}$$

となる．時間の全微分項は場の方程式に全く寄与しないので何も問題ないが，3次元発散については注意が必要である．つまり拘束条件のある理論に表われる発散項は，その拘束条件を使った後にはもはや発散ではないかも知れないので，取り除くことができるとは限らない．しかし上記の項については取り除いてよいことが ADM によって証明されている．

ここまでは重力場のみを考えてきたが，物体系と相互作用している場合にも作用関数(6-1)に物体系の Lagrange 関数を加えて同様に議論が展開される．ただし物体系についても Lagrange 関数は(5-82)ではなく力学変数の時間に関する1階微分について線形な形式

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{M}}=\sum_a\int ds_a\left\{p_{a\mu}\frac{dz_a{}^\mu}{ds_a}-\frac{1}{2}\lambda'_a(s_a)(p_{a\mu}p_{a\nu}{}^4g^{\mu\nu}(x)+m_a{}^2c^2)\right\}\delta^{(4)}(x-z_a(s_a)) \tag{6-14}$$

を採用する．ここで $\lambda'(s_a)$ は上記の N_0, N_i に類似の Lagrange の未定乗数である．

ここから重力場のみの場合と同様に議論を進めることができる．途中で s_a の積分を実行し，その結果生じる未定乗数 $\lambda_a=[\lambda'(s_a)ds_a/dz_a{}^0(s_a)]_{z_a{}^0(s_a)=ct}$ について変分をとると，拘束条件 $p_{a\mu}p_{a\nu}{}^4g^{\mu\nu}+m_a{}^2c^2=0$ が得られる．これの解

$$p_{a0}=N^ip_{ai}-N_0(g^{ij}p_{ai}p_{aj}+m_a{}^2c^2)^{1/2} \tag{6-15}$$

---

*) $\Gamma^i{}_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}(\partial_l g_{mk}+\partial_k g_{ml}-\partial_m g_{kl})$ を3次元の affine 係数とすると，

$$R_{ij}=\partial_j\Gamma^k{}_{jk}-\partial_k\Gamma^k{}_{ij}+\Gamma^l{}_{ik}\Gamma^k{}_{jl}-\Gamma^k{}_{ij}\Gamma^l{}_{kl},\quad R=g^{ij}R_{ij}$$

であり，また π^{ij} は3次元のテンソル密度なので

$$\pi^{ij}{}_{|k}=\partial_k\pi^{ij}+\Gamma^i{}_{kl}\pi^{lj}+\Gamma^j{}_{kl}\pi^{il}-\Gamma^l{}_{kl}\pi^{ij}$$

したがって

$$\pi^{ij}{}_{|j}=\partial_j\pi^{ij}+\Gamma^i{}_{jl}\pi^{lj}$$

である．

を利用して，作用関数中の p_{a0} を前もって消去しておく．

(6-13)に対応する最終の結果は次のようになる．

$$I=\frac{1}{c}\int d^4x\left\{\sum_a p_{ai}\frac{dz_a{}^i}{dt}\delta(\boldsymbol{x}-z_a(t))+\frac{c^4}{16\pi G}(\pi^{ij}\partial_0 g_{ij}+N_0R^0+N_iR^i)\right\}$$

(6-16)

ただし，R^0, R^i は(6-11)，(6-12)ではなく

$$R^0=g^{-1/2}\left\{-gR+\frac{1}{2}(g_{ij}\pi^{ij})^2-\pi^{ij}\pi_{ij}\right\}-\frac{16\pi G}{c^4}T^0{}_0 \tag{6-17}$$

$$R^i=2\pi^{ij}{}_{|j}+\frac{16\pi G}{c^4}T^i{}_0 \tag{6-18}$$

であり，物体系のエネルギー・運動量テンソル $T^\mu{}_0$ は

$$T^0{}_0=\sum_a c\sqrt{p_{ai}p_{aj}g^{ij}+m_a{}^2c^2}\,\delta(\boldsymbol{x}-z_a),\quad T^i{}_0=\sum_a cp_{aj}g^{ij}\delta(\boldsymbol{x}-z_a) \tag{6-19}$$

で与えられる．(6-16)から $\boldsymbol{p}_a=(p_{a1}, p_{a2}, p_{a3})$ は座標 z_a に正準共役な運動量であることがわかる．

さて作用関数 I の変分を考えよう．N_0, N_i の変分に対して

$$g^{-1/2}\left\{-gR+\frac{1}{2}(g_{ij}\pi^{ij})^2-\pi^{ij}\pi_{ij}\right\}-\frac{16\pi G}{c^4}T^0{}_0=0 \tag{6-20}$$

$$2\pi^{ij}{}_{|j}+\frac{16\pi G}{c^4}T^i{}_0=0 \tag{6-21}$$

が導かれる．これは時間微分を含まないので拘束方程式である*)．場の変数の時間的変化を記述する方程式は π^{ij} および g_{ij} の変分をとることによって導かれ

$$\partial_0 g_{ij}=2N_0g^{-1/2}\left(\pi_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}g_{mn}\pi^{mn}\right)+N_{i|j}+N_{j|i} \tag{6-22}$$

$$\begin{aligned}\partial_0\pi^{ij}=&N_0g^{1/2}\left(R^{ij}-\frac{1}{2}g^{ij}R\right)+\frac{1}{2}N_0g^{-1/2}g^{ij}\left\{\pi^{mn}\pi_{mn}-\frac{1}{2}(g_{mn}\pi^{mn})^2\right\}\\&-2N_0g^{-1/2}\left(\pi^{im}\pi^j{}_m-\frac{1}{2}g_{mn}\pi^{mn}\pi^{ij}\right)+g^{1/2}(N_0{}^{|ij}-g^{ij}N_0{}^{|m}{}_{|m})\end{aligned}$$

*）第1章における表記法に従えば拘束方程式には記号≈を用いるべきであるが本節では通常の等号で記す．

$$+\{(\pi^{ij}N^m)_{|m}-N^i{}_{|m}\pi^{mj}-N^j{}_{|m}\pi^{mi}\}+\frac{8\pi G}{c^3}N_0\sum_a\frac{p_a{}^ip_a{}^j}{\sqrt{p_{ak}p_a{}^k+m_a{}^2c^2}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)$$

(6-23)

となる．ここで R_{ij} は g_{ij} および g^{ij} から作られる 3 次元空間の Ricci テンソルである．16個の変数 $g_{ij}, \pi^{ij}, N_0, N_i$ に対する16個の方程式(6-20)～(6-23)が Einstein 方程式を書き直したものである．

作用関数の表示(6-16)から $H'=(-c^4/16\pi G)(N_0R^0+N_iR^i)$ を Hamilton 関数とみなすと拘束方程式(6-20), (6-21)によって $H'=0$ となる．理論の真の Hamilton 関数は拘束方程式を使って余分な変数を消去し，座標条件を選定した後にはじめて定まる．ここで重力場の変数の数を考えてみると，N_0 と N_i は単に Lagrange の未定乗数なので，力学変数は g_{ij}, π^{ij} の12個である．そのうち 4 個は拘束方程式によって他の変数で表わされ，独立な変数は 8 個となる．一方，12個の場の方程式(6-22)，(6-23)のうち 4 個は未定乗数 N_0, N_i を消去するのに使われるので，残りは 8 個である．これでちょうど良いようであるが，実は(6-22)，(6-23)のうち 4 個は Bianchi 恒等式に由来する恒等式であり，解を定めるためには 4 個の条件が不足である．この事は理論が一般座標変換のもとで不変であることに帰因するので，座標系に制限をつけなければ解は定まらない．そのための条件が座標条件で，g_{ij} および π^{ij} の 4 個の関数 $q^\mu(g_{ij}, \pi^{ij})$ を座標 x^μ と結びつけることによって与えられる*)．結局，重力場の真の力学変数は 4 個(2 組の正準共役な変数の対)となる．

作用関数(6-16)を最終的な正準形式の形に帰着させるために，まず，

$$\bar{h}_{ij}=g_{ij}+\delta_{ij} \tag{6-24}$$

を定義し，この $\bar{h}_{ij}$ と π^{ij} を§5-1の(5-69)と(5-70)に従って直交分解する．以下で使われる記号 $\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ij}, \bar{h}^{\mathrm{T}}_{ij}, \bar{h}_i, \bar{h}^{\mathrm{T}}$ および $\pi^{ij\mathrm{TT}}, \pi^{ij\mathrm{T}}, \pi^i, \pi^{\mathrm{T}}$ は $\bar{h}_{ij}, \pi^{ij}$ のそれぞれに対して(5-69)～(5-72)で定義される．$\bar{h}_{ij}, \pi^{ij}$ の直交分解を用い，拘束方程式(6-20)，(6-21)を使うと，作用関数は一般に

$$I=\frac{1}{c}\int d^4x\left(\sum_a p_{ai}\frac{dz_a{}^i}{dt}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)+\frac{c^4}{16\pi G}\Big[\pi^{ij\mathrm{TT}}\partial_0\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{ij}\right.$$

---

*) (6-27)，(6-28)を見よ．

$$-(-\triangle\bar{h}^{\mathrm{T}})\partial_0\left\{-\frac{1}{2\triangle}\left(\pi^{\mathrm{T}}+(1+y)\frac{1}{\triangle}\pi^{mn}{}_{,mn}\right)\right\}-2\pi^{ij}{}_{,j}\partial_0\left\{\bar{h}_i-\frac{1}{4}(1+y)\frac{1}{\triangle}\bar{h}^{\mathrm{T}}{}_{,i}\right\}\Bigg]\Bigg) \tag{6-25}$$

と書き直される．この書き直しには任意性があり，それがパラメータ y で示されている．後に方程式を具体的に解くことにより，このパラメータ y は前章で導入されたものと同一であることがわかる．

作用関数の表示(6-25)から正準変換の**生成子**（generator）G は

$$G=\int d^3x\left(\sum_a p_{ai}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\delta z_a{}^i+\frac{c^3}{16\pi G}\Bigg[\pi^{ij\mathrm{TT}}\delta\bar{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}\right.$$

$$\left.-(-\triangle\bar{h}^{\mathrm{T}})\delta\left\{-\frac{1}{2\triangle}\left(\pi^{\mathrm{T}}+(1+y)\frac{1}{\triangle}\pi^{mn}{}_{,mn}\right)\right\}-2\pi^{ij}{}_{,j}\delta\left\{\bar{h}_i-\frac{1}{4}(1+y)\frac{1}{\triangle}\bar{h}^{\mathrm{T}}{}_{,i}\right\}\Bigg]\right) \tag{6-26}$$

で与えられることがわかる．ここで，時間座標，空間座標と計量との間に汎関数関係（これが座標条件である）

$$x^0=-\frac{1}{2\triangle}\left\{\pi^{\mathrm{T}}+(1+y)\frac{1}{\triangle}\pi^{mn}{}_{,mn}\right\} \tag{6-27}$$

$$x^i=\bar{h}_i-\frac{1}{4}(1+y)\frac{1}{\triangle}\bar{h}^{\mathrm{T}}{}_{,i} \tag{6-28}$$

を設定すると，生成子は

$$G=\int d^3x\left\{\sum_a p_{ai}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\delta z_a{}^i+\frac{c^3}{16\pi G}\pi^{ij\mathrm{TT}}\bar{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}-\frac{1}{c}\mathscr{T}^0{}_\mu\delta x^\mu\right\} \tag{6-29}$$

という正準形に書き表わされる．ここで

$$\mathscr{T}^0{}_0=H=-\frac{c^4}{16\pi G}\triangle\bar{h}^{\mathrm{T}} \tag{6-30}$$

$$\mathscr{T}^0{}_i=\frac{c^4}{8\pi G}\pi^{ij}{}_{,j} \tag{6-31}$$

である．

重力場を通常の変数

$$h_{ij}=g_{ij}-\delta_{ij} \tag{6-32}$$

で記述するには，次の置き換えをすればよい．

$$\bar{h}^{\rm TT}_{ij} = h^{\rm TT}_{ij}, \quad \bar{h}^{\rm T}_{ij} = h^{\rm T}_{ij}, \quad \bar{h}^{\rm T} = h^{\rm T}, \quad \bar{h}_i = h_i + x^i. \text{*)} \tag{6-33}$$

座標条件(6-27)，(6-28)は微分形で表示すると

$$\pi^{\rm T} + (1+y)\frac{1}{\triangle}\pi^{mn}{}_{,mn} = 0 \tag{6-34}$$

$$\triangle h_i - \frac{1}{4}(1+y)h^{\rm T}{}_{,i} = 0 \tag{6-35}$$

となり，この座標条件によって，作用関数は正準形式の形

$$I = \frac{1}{c}\int d^4x \left\{ \sum_a p_{ai}\frac{dz_a{}^i}{dt}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a) + \frac{c^4}{16\pi G}(\pi^{ij\rm TT}\partial_0 h^{\rm TT}_{ij} + \triangle h^{\rm T}) \right\} \tag{6-36}$$

に帰着される．

この表式から，全系の Hamilton 関数は

$$H = -\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x \triangle h^{\rm T} \tag{6-37}$$

で与えられ，重力場の正準変数は $h^{\rm TT}_{ij}$ と，その正準共役量

$$p^{ij\rm TT} = \frac{c^3}{16\pi G}\pi^{ij\rm TT} \tag{6-38}$$

であることがわかる．$h^{\rm TT}_{ij}$ と $p^{ij\rm TT}$ は(5-71)を満たすので純粋な横波部分である．(6-37)中の $\triangle h^{\rm T}$ は正準変数 $h^{\rm TT}_{ij}$，$p^{ij\rm TT}$，$z_a{}^i$，p_{ai} の関数で，拘束方程式(6-20)，(6-21)を解いて定められる**)．

物体の運動について，Hamilton 関数(6-37)の与える正準方程式

$$\dot{p}_{ai} = -\frac{\partial H}{\partial z_a{}^i} \tag{6-39}$$

$$\dot{z}_a{}^i = \frac{\partial H}{\partial p_{ai}} \tag{6-40}$$

は，もとの Lagrange 関数から導かれる Euler-Lagrange 方程式と一致することが

---

*) (6-24)の $\bar{h}_{ij}$ を用いて議論を始めたのは，この $h^{\rm T}$，h_i を境界条件

$h^{\rm T}, \ h_i \xrightarrow[r\to\infty]{} O(1/r)$ を満足するように選ぶためである．

**) 表示を簡単にするために $16\pi G = c = 1$ の単位系がよく使われる．この単位系では $h^{\rm TT}{}_{ij}$ に対する正準共役量は $\pi^{ij\rm TT}$ である．本章では，前章との対応を明白にするために通常の単位系を用いる．

証明されている．また，重力場に対する正準方程式は

$$\dot{p}^{ijTT}=-\delta^{TTij}{}_{kl}\frac{\delta H}{\delta h^{TT}_{kl}} \tag{6-41}$$

$$\dot{h}^{TT}_{ij}=\delta^{TTkl}{}_{ij}\frac{\delta H}{\delta p^{klTT}} \tag{6-42}$$

である．ここで TT- 射影演算子 $\delta^{TTkl}{}_{ij}$ は(5-68)，(5-69)から

$$\delta^{TTkl}{}_{ij}=\frac{1}{2}\left\{\left(\delta^{k}{}_{i}-\frac{1}{\triangle}\partial_i\partial^l\right)\left(\delta^{l}{}_{j}-\frac{1}{\triangle}\partial_j\partial^l\right)+\left(\delta^{l}{}_{i}-\frac{1}{\triangle}\partial_i\partial^l\right)\left(\delta^{k}{}_{j}-\frac{1}{\triangle}\partial_j\partial^k\right)\right.$$
$$\left.-\left(\delta^{kl}-\frac{1}{\triangle}\partial^k\partial^l\right)\left(\delta_{ij}-\frac{1}{\triangle}\partial_i\partial_j\right)\right\} \tag{6-43}$$

で定義される．

なお，$y=0$ の場合の座標条件は*)

$$\pi^{ii}=0 \tag{6-44}$$

$$\triangle g_{ij,j}-\frac{1}{4}g_{jk,ijk}-\frac{1}{4}\triangle g_{jj,i}=0 \tag{6-45}$$

の形にまとめられる．この場合，計量テンソル g_{ij} および π^{ij} は

$$g_{ij}=\delta_{ij}+\frac{1}{2}\delta_{ij}h^{T}+h^{TT}_{ij} \tag{6-46}$$

$$\pi^{ij}=\left(\pi^{i}{}_{,j}+\pi^{j}{}_{,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k}{}_{,ijk}-\delta_{ij}\pi^{k}{}_{,k}\right)+\pi^{ijTT} \tag{6-47}$$

となる．ここで，重力場の変数の数を調べると，12個の変数 g_{ij}, π^{ij} に対し 4 個の座標条件を設定したので残っている変数は $h^T, \pi^i, h^{TT}_{ij}, \pi^{ijTT}$ の 8 個である．このうち，h^T, π^i の 4 個は 4 個の拘束方程式を使って解くことができ，最終的にはすべての量は正準変数 $z_a{}^i, p_{ai}, h^{TT}_{ij}, p^{ijTT}$ のみで表わされる．

§6-2　ポスト-ポスト-Newton 近似での Hamilton 関数

本節では，最初に $y=0$ の場合の Hamilton 関数を ppN 近似で計算する．y 依存性については後で考察する [2, 3]．Hamilton 関数を計算する際に注意しなければならないのは，(6-37)の表示からわかるように計量テンソル中の無限遠方にお

*）以下では，3 次元空間の同じ添字については上ツキ，下ツキを区別せず和をとる．

いて $1/r$ で振舞う項が寄与することである．したがって空間積分の中で3次元発散の寄与を簡単に落としてしまうことはできない．

計算の筋道は，座標条件(6-44)，(6-45)のもとで拘束方程式(6-20)，(6-21)を $\triangle h^{\mathrm{T}}$ について解き，z_a, p_a, h_{ij}^{TT}, $p^{ij\mathrm{TT}}$ で表わすことである．(6-46)を用いると，3次元のスカラー密度 $g^{1/2}R$ は

$$-g^{1/2}R=(g^{1/2}g^{jk}\Gamma^{i}{}_{jk})_{,i}-(g^{1/2}g^{ij}\Gamma^{k}{}_{jk})_{,i}+g^{1/2}g^{ij}(\Gamma^{m}{}_{ik}\Gamma^{k}{}_{jm}-\Gamma^{k}{}_{ij}\Gamma^{m}{}_{km})$$

$$=-\triangle h^{\mathrm{T}}+\frac{1}{8}\triangle(h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}})+\frac{1}{8}h^{\mathrm{T}}{}_{,i}h^{\mathrm{T}}{}_{,i}-\frac{1}{32}\triangle(h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}})-\frac{3}{32}h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}{}_{,i}h^{\mathrm{T}}{}_{,i}$$

$$+\frac{5}{512}\triangle(h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}})+\frac{15}{256}h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}{}_{,i}h^{\mathrm{T}}{}_{,i}+\frac{1}{2}\triangle(h_{ij}^{\mathrm{TT}}h_{ij}^{\mathrm{TT}})-\frac{1}{4}(h_{ij,k}^{\mathrm{TT}})^{2}$$

$$-\frac{1}{2}h_{ij,k}^{\mathrm{TT}}h_{ik,j}^{\mathrm{TT}}+\frac{1}{2}(h_{,i}^{\mathrm{T}}h_{ij}^{\mathrm{TT}})_{,j}-\frac{3}{8}(h^{\mathrm{T}}h^{\mathrm{T}}{}_{,i}h_{ij}^{\mathrm{TT}})_{,j}+\cdots \qquad (6\text{-}48)$$

となる．ここでは本節および次節の議論で必要になる項まで書き出してある．以後の計算を簡単にするために，関係式

$$1+\frac{1}{2}h^{\mathrm{T}}=\left(1+\frac{1}{8}\phi\right)^{4},\ \text{すなわち}\ h^{\mathrm{T}}=\phi+\frac{3}{16}\phi^{2}+\frac{1}{64}\phi^{3}+2\left(\frac{1}{8}\phi\right)^{4} \qquad (6\text{-}49)$$

によって ϕ を導入する．Hamilton 関数に寄与するのは h^{T} 中の無限遠方で $1/r$ のように振舞う項なので

$$H=-\frac{c^{4}}{16\pi G}\int d^{3}x\,\triangle\phi \qquad (6\text{-}50)$$

となる．また，(6-47)より

$$g^{-1/2}\left\{\frac{1}{2}(g_{ij}\pi^{ij})^{2}-\pi^{ij}\pi_{ij}\right\}=-\left(1+\frac{1}{4}\phi\right)\left\{-3(\pi^{i}{}_{,i})^{2}+\left(\pi^{i}{}_{,j}+\pi^{j}{}_{,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k}{}_{,ijk}\right)^{2}\right\}$$

$$-2\pi^{ij\mathrm{TT}}\left(\pi^{i}{}_{,j}+\pi^{j}{}_{,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k}{}_{,ijk}\right)-(\pi^{ij\mathrm{TT}})^{2}+\cdots \qquad (6\text{-}51)$$

となる．

これらの関係式を用いて，拘束方程式(6-20)，(6-21)を書き直し，必要となる項まで書くと

$$\triangle\phi+\frac{1}{8}\phi\triangle\phi+\frac{1}{4}(h_{ij,k}^{\mathrm{TT}})^{2}-\frac{1}{2}\triangle(h_{ij}^{\mathrm{TT}}h_{ij}^{\mathrm{TT}})+\frac{1}{2}h_{ij,k}^{\mathrm{TT}}h_{ik,j}^{\mathrm{TT}}$$

$$-\frac{1}{2}(\phi_{,i}h_{ij}^{\mathrm{TT}})_{,j}+\frac{3}{16}(\phi\phi_{,i}h_{ij}^{\mathrm{TT}})_{,j}+\frac{16\pi G}{c^{2}}\sum_{a}\left\{m_{a}+\frac{\boldsymbol{p}_{a}{}^{2}}{2c^{2}m_{a}}-\frac{(\boldsymbol{p}_{a}{}^{2})^{2}}{8c^{4}m_{a}{}^{3}}+\frac{(\boldsymbol{p}_{a}{}^{2})^{3}}{16c^{6}m_{a}{}^{5}}\right.$$

$$-\frac{1}{4c^2}\left(\phi-\frac{5}{16}\phi^2\right)\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}+\frac{1}{8c^4}\phi\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^3}-\frac{1}{2c^2}h_{ij}^{\mathrm{TT}}\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\Bigg\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)$$

$$+\left(1+\frac{1}{4}\phi\right)\left\{-3(\pi^i{}_{,i})^2+\left(\pi^i{}_{,j}+\pi^j{}_{,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^k{}_{,ijk}\right)^2\right\}+2\pi^{ij\mathrm{TT}}\Bigg(\pi^i{}_{,j}+\pi^j{}_{,i}$$

$$+\frac{1}{\triangle}\pi^k{}_{,ijk}\Bigg)+(\pi^{ij\mathrm{TT}})^2=0 \tag{6-52}$$

$$\triangle\pi^i+\pi^j{}_{,ij}+\frac{1}{2}\left(\pi^i{}_{,j}+\pi^j{}_{,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^k{}_{,ijk}-\delta_{ij}\pi^k{}_{,k}\right)\phi_{,j}$$

$$+\frac{8\pi G}{c^3}\sum_a\left(1-\frac{1}{2}\phi\right)p_{ai}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)=0 \tag{6-53}$$

となる．

ここで，ϕ，π^i を c^{-1} で展開する：

$$\phi=\phi^{(2)}+\phi^{(4)}+\phi^{(6)}+\phi^{(8)}+\cdots \tag{6-54}$$

$$\pi^i=\pi^{i(3)}+\pi^{i(5)}+\cdots \tag{6-55}$$

ϕ および π^i がそれぞれ c^{-2} 次，c^{-3} 次からはじまることは方程式(6-52)，(6-53)からわかる．また前章の計算が示すように h_{ij}^{TT} は c^{-4} 次から，したがって $\pi^{ij\mathrm{TT}}$ は c^{-5} 次からはじまるので，ppN 近似では

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}=h_{ij}^{\mathrm{TT}(4)} \tag{6-56}$$

$$\pi^{ij\mathrm{TT}}=0 \tag{6-57}$$

である．このことは方程式(6-22)および(6-23)の両辺の TT- 部をとった方程式に，以下に述べる拘束方程式からの逐次解を代入することによっても確かめられる．

展開式(6-54)と(6-55)を(6-52)，(6-53)に代入し，c^{-1} の各オーダーごとの方程式を解くと，低次の解は

$$\phi^{(2)}=\frac{4G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a} \tag{6-58}$$

$$\phi^{(4)}=-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}+\frac{2G}{c^4}\sum_a\frac{1}{r_a}\cdot\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a} \tag{6-59}$$

$$\pi^{i(3)}=\frac{2G}{c^3}\sum_a\left(\frac{p_{ai}}{r_a}-\frac{1}{4}p_{aj}r_{a,ij}\right) \tag{6-60}$$

となる．$\triangle\phi^{(6)}$ に対する方程式は

$$\triangle\phi^{(6)}=-\frac{1}{8}(\phi^{(2)}\triangle\phi^{(4)}+\phi^{(4)}\triangle\phi^{(2)})+\frac{1}{2}(\phi^{(2)}_{,i}h_{ij}^{\mathrm{TT}})_{,j}$$

$$+\frac{2\pi G}{c^4}\sum_a\left\{\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{c^2 m_a{}^3}+2\phi^{(2)}\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}\right\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)+3(\pi^{i(3)}_{\ ,i})^2-\left(\pi^{i(3)}_{\ ,j}+\pi^{j(3)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(3)}_{\ ,ijk}\right)^2$$

(6-61)

である．

これらを用いて Hamilton 関数を計算すると，Newton 近似では

$$H^{\mathrm{N}}=-\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\{\triangle\phi^{(2)}+\triangle\phi^{(4)}\}$$

$$=\sum_a m_a c^2+\frac{1}{2}\sum_a\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}, \tag{6-62}$$

pN 次では，(6-61)の右辺に低次の解を代入して積分すると（$(\phi^{(2)}_{,i}h^{\mathrm{TT}}_{ij})_{,j}$ 項は積分に寄与しない）

$$H^{\mathrm{pN}}=-\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\,\triangle\phi^{(6)}$$

$$=-\frac{1}{8c^2}\sum_a m_a\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}\right)^2-\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left\{3\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}\right)-7\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\right.$$

$$\left.-\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\right\}+\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}} \tag{6-63}$$

となる．

$\triangle\phi^{(8)}$ に対する方程式は(6-52)より

$$\triangle\phi^{(8)}=-\frac{1}{8}(\phi^{(2)}\triangle\phi^{(6)}+\phi^{(4)}\triangle\phi^{(4)}+\phi^{(6)}\triangle\phi^{(2)})-\frac{1}{4}(h^{\mathrm{TT}}_{ij,k})^2+\frac{1}{2}\triangle(h^{\mathrm{TT}}_{ij}h^{\mathrm{TT}}_{ij})$$

$$-\frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{ij,k}h^{\mathrm{TT}}_{ik,j}+\frac{1}{2}(\phi^{(4)}_{,i}h^{\mathrm{TT}}_{ij})_{,j}-\frac{3}{16}(\phi^{(2)}\phi^{(2)}_{,i}h^{\mathrm{TT}}_{ij})_{,j}-\frac{16\pi G}{c^2}\sum_a\left\{\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^3}{16c^6 m_a{}^5}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4c^2}\left(\phi^{(4)}-\frac{5}{16}\phi^{(2)}\phi^{(2)}\right)\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}+\frac{1}{8c^4}\phi^{(2)}\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^3}-\frac{1}{2c^2}h^{\mathrm{TT}}_{ij}\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\right\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)$$

$$-\frac{1}{4}\phi^{(2)}\left\{-3(\pi^{i(3)}_{\ ,i})^2+(\pi^{i(3)}_{\ ,j}+\pi^{j(3)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(3)}_{\ ,ijk})^2\right\}+6\pi^{i(3)}_{\ ,i}\pi^{j(5)}_{\ ,j}$$

$$-2(\pi^{i(3)}_{\ ,j}+\pi^{j(3)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(3)}_{\ ,ijk})(\pi^{i(5)}_{\ ,j}+\pi^{j(5)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(5)}_{\ ,ijk})$$

$$-2\pi^{ij\mathrm{TT}}\left(\pi^{j(3)}_{\ ,j}+\pi^{j(3)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(3)}_{\ ,ijk}\right) \tag{6-64}$$

である．積分 $\int d^3x \triangle \phi^{(8)}$ の計算において，3次元発散および部分積分の際生じる表面積分の扱いに注意し，さらに(6-53)から導かれる関係式

$$\int d^3x \left[-6\pi^{i(3)}_{\ ,i}\pi^{j(5)}_{\ ,j} + 2\left(\pi^{i(3)}_{\ ,j}+\pi^{j(3)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(3)}_{\ ,ijk}\right)\left(\pi^{i(5)}_{\ ,j}+\pi^{j(5)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{l(5)}_{\ ,ijl}\right)\right.$$
$$\left. + \phi^{(2)}\left\{-3(\pi^{i(3)}_{\ ,i})^2+\left(\pi^{i(3)}_{\ ,j}+\pi^{j(3)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(3)}_{\ ,ijk}\right)^2\right\}\right]=0 \qquad (6\text{-}65)$$

を利用すると，ppN 次の Hamilton 関数は

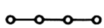
$$H^{\mathrm{ppN}}=-\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x \triangle \phi^{(8)}$$
$$=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x \left[\frac{1}{8}\phi^{(4)}\triangle\phi^{(4)}+\frac{1}{4}\phi^{(2)}\triangle\phi^{(6)}+\frac{1}{4}(h^{\mathrm{TT}}_{ij,k})^2+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_a\left\{\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^3}{16c^4 m_a{}^5}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\left(\phi^{(4)}-\frac{5}{16}\phi^{(2)}\phi^{(2)}\right)\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}+\frac{1}{8c^2}\phi^{(2)}\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^3}-\frac{1}{2}h^{\mathrm{TT}}_{ij}\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\right\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)$$
$$\left.-\frac{3}{4}\phi^{(2)}\left\{-3(\pi^{i(3)}_{\ ,i})^2+\left(\pi^{i(3)}_{\ ,j}+\pi^{j(3)}_{\ ,i}+\frac{1}{\triangle}\pi^{k(3)}_{\ ,ijk}\right)^2\right\}\right] \qquad (6\text{-}66)$$

で与えられる．方程式(6-64)の最後にある $\pi^{ij\mathrm{TT}}$ の項は積分には寄与しない．

ここで $\triangle\phi^{(6)}$ に(6-61)を代入し，(6-58)～(6-60)の解を用いて積分を実行する．(付録 A-6 の積分公式を利用する．) その結果 ppN 近似の系の全 Hamilton 関数 $H = H^{\mathrm{N}}+H^{\mathrm{pN}}+H^{\mathrm{ppN}}$ は

$$H = H_m + H_g \quad , \qquad (6\text{-}67)$$

$$H_m=\sum_a m_a c^2+\frac{1}{2}\sum_a\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}-\frac{1}{8c^2}\sum_a m_a\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}\right)^2+\frac{1}{16c^4}\sum_a m_a\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}\right)^3-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}$$
$$+\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left\{-3\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}\right)+7\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\right\}$$

$+\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}-\frac{1}{4}U($  $)-\frac{3}{8}U($  $)$

$$+\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}\left\{20\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+8\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}-50\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+17\frac{(\boldsymbol{p}_b\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_b m_c}\right.$$
$$\left.-14\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+14\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_b m_c}+(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_b m_c}\right\}$$

$$+\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_am_bm_c}{r_{ab}^{\ 2}}\left\{2\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_am_c}+2\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_bm_c}\right\}$$

$$+\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_am_bm_c}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})^2}(n_{ab}{}^i+n_{ac}{}^i)(n_{ab}{}^j-n_{bc}{}^j)$$

$$\times\left(8\frac{p_{ai}p_{cj}}{m_am_c}-16\frac{p_{aj}p_{ci}}{m_am_c}+3\frac{p_{ai}p_{bj}}{m_am_b}\right)$$

$$+\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b}\frac{m_am_bm_c}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})r_{ab}}\left\{8\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_c)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_am_c}\right.$$

$$\left.-3\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_am_b}\right\}+\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b{}^2}{r_{ab}{}^2}\left\{19\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}-4\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_am_b}\right.$$

$$\left.-35\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_b{}^2}\right\}+\frac{5G}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}}\left\{\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^4}-\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_a{}^2m_b{}^2}\right\}\quad, \tag{6-68}$$

$$H_g=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\left\{-\left(\frac{1}{8}\phi^{(2)}_{,i}\phi^{(2)}_{,j}+\frac{8\pi G}{c^4}\sum_c\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\right)h^{\mathrm{TT}}_{ij}+\frac{1}{4}(h^{\mathrm{TT}}_{ij,k})^2\right\} \tag{6-69}$$

となる．この H_g は h^{TT}_{ij} の寄与を表わす．しかし ppN 近似では，先に述べたように h^{TT}_{ij} は変数 $\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{p}_a$ で表わされる．このことは以下の様にしてもわかる．すなわち，Hamilton 関数(6-67)に対して重力場の正準方程式(6-41)，(6-42)は，ppN 近似の条件(6-56)，(6-57)のもとで

$$0=\dot{p}^{ij\mathrm{TT}}=\frac{c^4}{32\pi G}\left[\triangle h^{\mathrm{TT}}_{ij}+\delta^{\mathrm{TT}ij}{}_{kl}\left\{\frac{1}{4}\phi^{(2)}_{,k}\phi^{(2)}{}_{,l}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_a\frac{p_{ak}p_{al}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\right\}\right], \tag{6-70}$$

$$\dot{h}^{\mathrm{TT}}_{ij}=0 \tag{6-71}$$

を与える．(6-70)の解として，§5-1の表記法を用いると

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij}=h^{\mathrm{TT}(4)}_{ij}=-\frac{1}{\triangle}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\left\{\frac{1}{4}\phi^{(2)}_{,k}\phi^{(2)}_{,l}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_a\frac{p_{ak}p_{al}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\right\}$$

$$=-4f^{\mathrm{TT}}_{ij}+4\left(\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_ar_a}\right)^{\mathrm{TT}} \tag{6-72}$$

を得る．方程式(6-71)は ppN 近似においては c^{-2} 次なので条件(6-57)のもとでは自動的に満たされている．

(6-72)を(6-69)に代入し，付録 A-6 の積分公式を利用すると

$$H_g = U^{\mathrm{TT}} + \frac{G^2}{4c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}\left\{-\frac{\boldsymbol{p}_a^{\,2}}{m_a^{\,2}} + 3\frac{\boldsymbol{p}_b^{\,2}}{m_b^{\,2}} - \frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_b^{\,2}}\right\}$$

$$+\frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}^{\,2}}\left\{5(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\frac{\boldsymbol{p}_c^{\,2}}{m_c^{\,2}} - (\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\frac{(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)^2}{m_c^{\,2}}\right.$$

$$\left.-14\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{p}_c)}{m_c^{\,2}}\right\} + \frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b} m_a m_b m_c \frac{(n_{ab}{}^i + n_{ac}{}^i)(n_{ab}{}^j - n_{bc}{}^j)}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})^2}$$

$$\times\left\{4\frac{p_{ci}p_{cj}}{m_c^{\,2}} + \frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a^{\,2}}\right\} - \frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b} m_a m_b m_c \frac{1}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})r_{ab}}$$

$$\times\left\{4\frac{\boldsymbol{p}_c^{\,2} - (\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_c)^2}{m_c^{\,2}} + \frac{\boldsymbol{p}_a^{\,2} - (\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)^2}{m_a^{\,2}}\right\} + \frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b^{\,2}}{r_{ab}^{\,2}}\left\{2\frac{\boldsymbol{p}_a^{\,2}}{m_a^{\,2}} - 17\frac{\boldsymbol{p}_b^{\,2}}{m_b^{\,2}}\right.$$

$$\left.+35\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_b^{\,2}}\right\} + \frac{G}{16c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left\{-\frac{\boldsymbol{p}_a^{\,2}\boldsymbol{p}_b^{\,2}}{m_a^{\,2}m_b^{\,2}} - 2\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_a^{\,2}m_b^{\,2}}\right.$$

$$+10\frac{\boldsymbol{p}_a^{\,2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_a^{\,2}m_b^{\,2}} - 12\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a^{\,2}m_b^{\,2}} - 3\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_a^{\,2}m_b^{\,2}}$$

(6-73)

となる．この結果から定まる ppN 近似の全 Hamilton 関数(6-67)は，前章において Fokker 作用関数から求めた(5-152)と一致する*)．なお，(6-73)中の U^{TT} は，次章で考察する S 行列の議論から，素粒子間でスピン 2 の graviton（**重力子**）を内線の間で交換することによって生じるポテンシャルであることがわかる．(図8-6(i)を参照)

重力場の変数のうち，残っている N_0，N_i は方程式(6-22)，(6-23)から定められる．まず，方程式(6-22)は ppN 近似で

$$g_{ij,0} = 2\pi^{ij} + N_{i,j} + N_{j,i} + \frac{1}{2}\delta_{ij}N_m\phi_{,m} - \frac{1}{2}(N_i\phi_{,j} + N_j\phi_{,i}) \tag{6-74}$$

となる．この式を座標条件(6-45)を時間で微分した式に代入し

*）ppN 近似における物体の運動方程式が全 Hamilton 関数（6-67）中の h_{ij}^{TT} を（6-72）の $h_{ij}^{\mathrm{TT}(4)}$ で書き直したもので記述されることは，正準方程式（6-39)，(6-40）を直接書き下し，重力場の正準方程式（6-70)，(6-71)と組合せることによって証明される．(次節の（6-92)～(6-94）を参照せよ.)

$$\triangle N_i = -2\pi^{ij}{}_{,j} + \frac{1}{2\triangle}\pi^{mn}{}_{,mni} + \frac{1}{2}(N_i \triangle \phi + N_{i,j}\phi_{,j} + N_{j,j}\phi_{,i} + N_j\phi_{,ij})$$

$$-\frac{1}{4}(N_j\phi_{,j})_{,i} - \frac{1}{8\triangle}(N_j\phi_{,k} + N_k\phi_{,j})_{,ijk} \tag{6-75}$$

を得る．一方，N_0 に対する方程式は，座標条件(6-44)の時間微分式と方程式(6-23)とから，ppN 近似では

$$\triangle N_0 = \frac{1}{4}\phi \triangle N_0 - \frac{1}{4}\phi_{,i}N_{0,i} - \frac{3}{64}\phi^2 \triangle N_0 - \frac{1}{32}\phi\phi_{,i}\phi_{,i} - N_{i,j}\pi^{ij} - \frac{1}{4}\pi^{ij}\pi^{ij}$$

$$+ N_{0,ij}h^{TT}_{ij} + \frac{4\pi G}{c^2}\sum_a\Big[m_a\Big\{1 - \frac{1}{2}\phi^{(2)} + N_0^{(2)} - \frac{1}{2}\phi^{(4)} + N_0^{(4)} - \frac{1}{2}\phi^{(2)}N_0^{(2)}$$

$$+ \frac{5}{32}(\phi^{(2)})^2\Big\} + \frac{3}{2c^2}\cdot\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}(1 - \phi^{(2)} + N_0^{(2)}) - \frac{1}{2c^4}\cdot\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^3}\Big]\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_a)$$

$$\tag{6-76}$$

となる．方程式(6-75)と(6-76)は拘束方程式の逐次解と合わせて逐次解くことができる．ppN 近似での解は付録 A-7 にまとめてある．

この節の最後に，Hamilton 関数のパラメータ y に対する依存性を pN 近似で調べておこう．

座標条件(6-34)，(6-35)のもとで，計量テンソル g_{ij} および π^{ij} は

$$g_{ij} = \delta_{ij}\Big(1 + \frac{1}{2}h^{\mathrm{T}}\Big) + y\frac{1}{2\triangle}h^{\mathrm{T}}{}_{,ij} + h^{TT}_{ij} \tag{6-77}$$

$$\pi^{ij} = \pi^i{}_{,j} + \pi^j{}_{,i} + (1+y)\frac{1}{\triangle}\pi^k{}_{,ijk} - (1+y)\delta_{ij}\pi^k{}_{,k} + \pi^{ijTT} \tag{6-78}$$

となる．再び(6-49)を用いると，拘束方程式(6-20)，(6-21)より

$$\triangle\phi + \frac{1}{8}\phi\triangle\phi - \frac{1}{2}(\phi_{,i}h^{TT}_{ij})_{,j} + \frac{1}{4}y\phi\triangle\phi - \Big(\frac{1}{4}y - \frac{1}{16}y^2\Big)\phi_{,i}\phi_{,i} - \frac{1}{4}y\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ij}\Big)\phi_{,ij}$$

$$-\frac{1}{16}y^2\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ijk}\Big)\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ijk}\Big) + \Big(-\frac{1}{16}y + \frac{7}{128}y^2 - \frac{1}{128}y^3\Big)\phi^2\triangle\phi$$

$$+\frac{3}{32}y^2\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ij}\Big)\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ij}\Big)\triangle\phi - \frac{3}{8}y^2\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ij}\Big)\phi_{,ij}\phi$$

$$-\Big(\frac{21}{64}y^2 + \frac{1}{64}y^3\Big)\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ijk}\Big)\Big(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ijk}\Big)\phi$$

$$+\frac{16\pi G}{c^2}\sum_a\left[\left\{1+\frac{y}{4}\phi+\frac{-5y+2y^2}{64}\phi^2+\frac{y^2}{16}\left(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ij}\right)^2\right\}m_a+\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{2c^2m_a}-\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{8c^4m_a{}^3}\right.$$

$$\left.-\frac{2-y}{8c^2}\phi\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a}-\frac{y}{4c^2}\left(\frac{1}{\triangle}\phi_{,ij}\right)\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\right]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)-(3+2y+y^2)(\pi^i{}_{,i})^2$$

$$+\left(\pi^i{}_{,j}+\pi^j{}_{,i}+(1+y)\frac{1}{\triangle}\pi^k{}_{,ijk}\right)^2=0 \tag{6-79}$$

$$\triangle\pi^i+\pi^j{}_{,ij}+\frac{8\pi G}{c^3}\sum_a p_{ai}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)=0 \tag{6-80}$$

を得る．(6-79)において，y 依存項で pN 次の Hamilton 関数に寄与しない発散項は除いてある．前と同様に ϕ，π^i を(6-54)，(6-55)のように c^{-1} で展開し，逐次解くと $\phi^{(2)}$ および $\pi^{i(3)}$ は前と同じ解(6-58)，(6-60)となり $\phi^{(4)}$ に対する方程式は

$$\triangle\phi^{(4)}=\left(\frac{1}{8}y-\frac{1}{32}y^2\right)\triangle(\phi^{(2)}\phi^{(2)})+\frac{1}{4}y\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ij}\right)\phi^{(2)}_{,ij}+\frac{1}{16}y^2\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ijk}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ijk}\right)-\frac{16\pi G}{c^2}\sum_a\left\{\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}y+\frac{1}{16}y^2\right)\phi^{(2)}m_a+\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{2c^2m_a}\right\}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)$$

$$\tag{6-81}$$

となる．したがって，空間積分の結果は

$$-\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\,\triangle\phi^{(4)}=\sum_a\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{2m_a}-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}} \tag{6-82}$$

を与える．

さらに，(6-79)より導かれる $\triangle\phi^{(6)}$ に対する方程式から，部分積分を行うことにより

$$\int d^3x\,\triangle\phi^{(6)}=\int d^3x\left(\left(\frac{1}{32}y-\frac{5}{64}y^2+\frac{1}{64}y^3\right)\phi^{(2)}\phi^{(2)}\triangle\phi^{(2)}-\frac{1}{16}y\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ij}\right)\phi^{(2)}_{,ij}\phi^{(2)}\right.$$

$$+\frac{1}{16}y^2\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ij}\right)\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ij}\right)\triangle\phi^{(2)}-\frac{16\pi G}{c^2}\sum_a\left[\left\{\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{64}y+\frac{5}{64}y^2-\frac{1}{64}y^3\right)\phi^{(2)}\phi^{(2)}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{16}y^2\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ij}\right)\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ij}\right)\right\}m_a-\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{8c^4m_a{}^3}-\frac{3}{8}\phi^{(2)}\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{c^2m_a}$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4c^2}y\left(\frac{1}{\triangle}\phi^{(2)}_{,ij}\right)\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\right]\right)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a) \tag{6-83}$$

が得られる．ここで，方程式(6-81)および低次の解(6-58)，(6-60)を用いて積分を実行すると

$$-\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\,\triangle\,\phi^{(6)}=\frac{G^2}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}+y\frac{G}{2c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})$$

$$+\frac{G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left[-(3+y)\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}\right)+y\left\{\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)^2}{m_a{}^2}+\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_b{}^2}\right\}\right.$$

$$\left.+(7+2y)\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+(1-2y)\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\right]-\frac{1}{8c^2}\sum_a m_a\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^4}$$

(6-84)

となる．

以上のことから，pN 近似の Hamilton 関数 $H=-\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\ \triangle(\phi^{(2)}+\phi^{(4)}+\phi^{(6)})$ は前章の結果(5-151)と一致する．また，計量テンソルの解も一致するので，パラメータ y は前章で導入されたものと同一であることがわかる．

§6-3　重力輻射と四重極公式

物体系の周期的な運動に伴ってまわりの重力場が周期的に変化し，その場の変動が波動として遠方に伝播するのが**重力波**である．重力波の存在は最初に Einstein 自身によって弱い場の解の研究の中で示された．その後，物質の存在しない空間での場の方程式の厳密解として波動の性質を有するものが色々見出されている．

荷電粒子の加速運動によって生じる電磁波と同様に，重力波はエネルギーを運ぶので，それによって物体系の運動は減速する．この効果は**輻射の反作用力**と呼ばれる項を運動方程式の中にとり入れることによって表わされる．

この節では，前節までの議論を発展させ重力輻射を扱い，輻射の反作用力が四重極モーメントに依存することを示す．また，この反作用力による物体系のエネルギーの消失の**四重極公式**が導かれる[4]．以下の議論は c^{-1} 展開に基づいているので，弱い重力場かつ遅い運動の場合に適用される．近年，四重極公式の一般的正当性について疑問が提示され（たとえば，強い重力源や非常に速い速度を持つ系），輻射の反作用について詳しく研究された．その結果，四重極公式は，より一般的条件のもとで正しいことが示されている．

物質の存在しない自由な空間を伝播する重力波は波動方程式

$$\Box\, h_{ij}^{\mathrm{TT}}=\left(\triangle-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)h_{ij}^{\mathrm{TT}}=0 \tag{6-85}$$

を満たすと考えられる．方程式(6-85)は，重力場の変数 h_{ij}^{TT}，$p^{ij\mathrm{TT}}$ の自由 Hamilton 関数

$$H_{rad}=\int d^3x\left\{\frac{16\pi G}{c^2}(p^{ij\mathrm{TT}})^2+\frac{c^4}{64\pi G}(h_{ij,k}^{\mathrm{TT}})^2\right\} \tag{6-86}$$

に対する正準方程式から導かれる．

伝播する重力波を最低次で考慮した全系の Hamilton 関数は，前節と同様に(6-50)から定められるが，上記のことから $\triangle\phi$ に対する方程式(6-52)において $(\pi^{ij\mathrm{TT}})^2$ 項まで取り入れればよい．結果は，(6-68)の H_m および(6-86)の H_{rad} を用いて

$$H=H_m+H_{int}+H_{rad}\qquad , \tag{6-87}$$

$$H_{int}=-\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\left\{\frac{1}{8}\phi_{,i}^{(2)}\phi_{,j}^{(2)}+\frac{8\pi G}{c^4}\sum_a\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\right\}h_{ij}^{\mathrm{TT}} \tag{6-88}$$

で与えられる*)．この全 Hamilton 関数から導かれる重力場の正準方程式(6-41)，(6-42)は

$$\dot{p}^{ij\mathrm{TT}}=\frac{c^4}{32\pi G}\left[\triangle h_{ij}^{\mathrm{TT}}+\delta^{\mathrm{TT}ij}{}_{kl}\left\{\frac{1}{4}\phi_{,k}^{(2)}\phi_{,l}^{(2)}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_a\frac{p_{ak}p_{al}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\right\}\right] \tag{6-89}$$

$$\dot{h}_{ij}^{\mathrm{TT}}=\frac{32\pi G}{c^2}p^{ij\mathrm{TT}} \tag{6-90}$$

となり，結局

$$\Box h_{ij}^{\mathrm{TT}}=-\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\left\{\frac{1}{4}\phi_{,k}^{(2)}\phi_{,l}^{(2)}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_a\frac{p_{ak}p_{al}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\right\} \tag{6-91}$$

が導かれる．

---

*) 場の理論としての形を整えるためには，正準変数として h_{ij}^{TT}，$p^{ij\mathrm{TT}}$ の代りに

$$\varphi_{ij}^{\mathrm{TT}}=\sqrt{\frac{c^4}{32\pi G}}h_{ij}^{\mathrm{TT}},\quad \Pi^{ij\mathrm{TT}}=\sqrt{\frac{32\pi G}{c^4}}p^{ij\mathrm{TT}}$$

を用いると都合がよい．この新しい変数によって，H_{rad} は

$$H_{rad}=\frac{1}{2}\int d^3x\{c^2(\Pi^{ij\mathrm{TT}})^2+(\varphi_{ij,k}^{\mathrm{TT}})^2\}$$

と表わされる．

輻射の反作用力について議論する準備として，ppN 近似での運動方程式について整理しておこう．ppN 近似では(6-69)の H_g は(6-72)の $h_{ij}^{\mathrm{TT}(4)}$ によって与えられるので

$$H_g = \frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\phi_{,k}^{(2)}\phi_{,l}^{(2)}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_b\frac{p_{bk}p_{bl}}{m_b}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b)\right)h_{kl}^{\mathrm{TT}(4)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}(h_{ij,k}^{\mathrm{TT}(4)})^2\right\}$$
$$=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\left\{-\frac{1}{4}h_{ij,k}^{\mathrm{TT}(4)}h_{ij,k}^{\mathrm{TT}(4)}\right\}$$
$$=\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\phi_{,k}^{(2)}\phi_{,l}^{(2)}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_b\frac{p_{bk}p_{bl}}{m_b}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b)\right)h_{kl}^{\mathrm{TT}(4)}\right\}$$
$$(6\text{-}92)$$

である．このことに注意すると，全 Hamilton 関数(6-67)から導かれる正準方程式は

$$\dot{p}_{ai} = -\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}(H_m+H_g)$$
$$= -\frac{\partial H_m}{\partial z_a{}^i}+\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\left\{\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}\left(\frac{1}{4}\phi_{,k}^{(2)}\phi_{,l}^{(2)}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_b\frac{p_{bk}p_{bl}}{m_b}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b)\right)\right\}h_{kl}^{\mathrm{TT}(4)}$$
$$(6\text{-}93)$$

$$\dot{z}_a{}^i=\frac{\partial H_m}{\partial p_{ai}}-\frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x\left\{\frac{\partial}{\partial p_{ai}}\left(\frac{1}{4}\phi_{,k}^{(2)}\phi_{,l}^{(2)}+\frac{16\pi G}{c^4}\sum_b\frac{p_{bk}p_{bl}}{m_b}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b)\right)\right\}h_{kl}^{\mathrm{TT}(4)}$$
$$(6\text{-}94)$$

となる．簡単化のためにこの方程式を

$$\dot{p}_{ai} = F_{ai}(\boldsymbol{z}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_n,\ \boldsymbol{p}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n) \qquad (6\text{-}95)$$

$$\dot{z}_a{}^i = \frac{p_{ai}}{m_a}+G_{ai}(\boldsymbol{z}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_n,\ \boldsymbol{p}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n) \qquad (6\text{-}96)$$

とおく．(6-96)を p_{ai} について解いた式を

$$p_{ai} = m_a\dot{z}_a{}^i+K_{ai}(\boldsymbol{z}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_n,\ \dot{\boldsymbol{z}}_1,\ \cdots,\ \dot{\boldsymbol{z}}_n) \qquad (6\text{-}97)$$

とおき，(6-95)に代入し，F_{ai} 中の $\boldsymbol{p}$ も(6-97)によって書き直すと運動方程式として

$$m_a\frac{d^2z_a{}^i}{dt^2} = f_{ai}$$

$$= \overline{F_{ai}}(z_1,\ \cdots,\ z_n,\ \dot{z}_1,\ \cdots,\ \dot{z}_n) - \frac{dK_{ai}}{dt} \tag{6-98}$$

を得る．ただし $\overline{F_{ai}}(z_1,\ \cdots,\ z_n,\ \dot{z}_1,\ \cdots,\ \dot{z}_n) = F_{ai}(z_1,\ \cdots,\ z_n,\ p_1,\ \cdots,\ p_n)$ である．

重力輻射の効果を含む近似では，正準方程式は(6-87)の全 Hamilton 関数から導かれ，

$$\dot{p}_{ai} = F_{ai} + \frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x \left\{ \frac{\partial}{\partial z_a{}^i} \left(\frac{1}{4}\phi^{(2)}_{,k}\phi^{(2)}_{,l} + \frac{16\pi G}{c^4}\sum_b \frac{p_{bk}p_{bl}}{m_b}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b) \right) \right\} (h^{\mathrm{TT}}_{kl})_{\mathrm{reac}}, \tag{6-100}$$

$$\dot{z}_a{}^i = \frac{p_{ai}}{m_a} + G_{ai} - \frac{c^4}{32\pi G}\int d^3x \left\{ \frac{\partial}{\partial p_{ai}} \left(\frac{1}{4}\phi^{(2)}_{,k}\phi^{(2)}_{,l} + \frac{16\pi G}{c^4}\sum_b \frac{p_{bk}p_{bl}}{m_b}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b) \right) \right\} (h^{\mathrm{TT}}_{kl})_{\mathrm{reac}} \tag{6-101}$$

となる．ここで，反作用の場 $(h^{\mathrm{TT}}_{ij})_{\mathrm{reac}}$ は

$$(h^{\mathrm{TT}}_{ij})_{\mathrm{reac}} = h^{\mathrm{TT}}_{ij} - h^{\mathrm{TT}(4)}_{ij} \tag{6-102}$$

で定義されるものである．(6-101)を p_{ai} について解くと

$$p_{ai} = m_a\dot{z}_a{}^i + K_{ai} + m_a\dot{z}_a{}^j h^{\mathrm{TT}}_{ij}(t,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}_a)_{\mathrm{reac}} \tag{6-103}$$

となり，運動方程式は

$$m_a\frac{d^2 z_a{}^i}{dt^2} = f_{ai} + (f_{ai})_{\mathrm{reac}} \tag{6-104}$$

と表わされる．ここで，$(f_{ai})_{\mathrm{reac}}$ は輻射の反作用を示す項で

$$(f_{ai})_{\mathrm{reac}} = \frac{c^4}{128\pi G}\int d^3x \left\{ \frac{\partial}{\partial z_a{}^i}(\phi^{(2)}_{,k}\phi^{(2)}_{,l}) \right\} h^{\mathrm{TT}}_{kl}(t,\ \boldsymbol{x})_{\mathrm{reac}} + \frac{1}{2}m_a\dot{z}_a{}^j\dot{z}_a{}^k\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}h^{\mathrm{TT}}_{jk}(t,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}_a)_{\mathrm{reac}} - \frac{d}{dt}\{m_a\dot{z}_a{}^j h^{\mathrm{TT}}_{ij}(t,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{z}_a)_{\mathrm{reac}}\} \tag{6-105}$$

で与えられる．

反作用力を計算するために，h^{TT}_{ij} を求めよう．入射波が存在しないという Fock の条件のもとで，方程式(6-91)の解は

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij} = -G_{\mathrm{ret}}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\left\{ \frac{1}{4}\phi^{(2)}_{,k}\phi^{(2)}_{,l} + \frac{16\pi G}{c^4}\sum_a \frac{p_{ak}p_{al}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a) \right\} \tag{6-106}$$

で与えられる．ここで，G_{ret} は平坦時空での Green 演算子である．

物体の存在する領域の典型的サイズをD，放射される重力波の波長をλとするとき，以下では，条件

$$\lambda\!\!\!^{-} \gg D, \left(\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi}\right) \tag{6-107}$$

が成り立つものとする．これは物体が遅い運動をしているという条件に対応する．また計算を簡単にするため，物体系の慣性の中心 $\boldsymbol{R}$ を座標系の原点に選ぶことにする*)．

さて，h_{ij}^{TT} を波長λによって特徴づけられる 2 つの空間的領域，$|\boldsymbol{x}| \gg \lambda\!\!\!^{-}$ および $|\boldsymbol{x}| \ll \lambda\!\!\!^{-}$ で計算する．前者の領域は radiation zone**)，後者は near zone と呼ばれる．恒等式

$$\frac{1}{4}\phi^{(2)}_{,i}\phi^{(2)}_{,j} = -\frac{1}{2}\chi_{,ij}\triangle\phi^{(2)} + \frac{1}{2}\nabla(\chi_{,ij}\nabla\phi^{(2)} - \phi^{(2)}\nabla\chi_{,ij}) + \frac{1}{4}(\phi^{(2)}_{,i}\phi^{(2)})_{,j} \tag{6-108}$$

$$\left(\chi = \frac{G}{c^2}\sum_a m_a r_a\right)$$

を利用すると，(6-106)は

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}} = -\frac{16\pi G}{c^4}G_{\mathrm{ret}}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\left\{-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b \frac{n_{ab}{}^k n_{ab}{}^l}{r_{ab}}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a) + \sum_a \frac{p_{ak}p_{al}}{m_a}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)\right\} - \frac{1}{2}G_{\mathrm{ret}}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\nabla(\chi_{,kl}\nabla\phi^{(2)} - \phi^{(2)}\nabla\chi_{,kl}) \tag{6-109}$$

となる．この右辺の第 1 項を Fourier 積分の表示に書き直し

---

*）慣性中心については§7-1で詳述する．(6-106)の h_{ij}^{TT} は既に c^{-4} 次なので，ここでは Newton 近似における慣性中心 $\boldsymbol{R} = \sum_a m_a z_a / \sum_a m_a$ を用いればよい．

**）radiation zone の正確な定義は次の 3 つの条件から成る．

(1) $kr \gg 1 \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda},\ r = |\boldsymbol{x}|\right)$

(2) $|g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \sim \frac{a}{r} \ll 1$

(3) $k_{\min} \gg k_{\max}\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}$

(2)は重力ポテンシャルが十分弱いこと．(3)は高次の非線形項の寄与が無視できることを表わす．

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}=\frac{16\pi G}{c^4}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\int\left[-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\frac{n_{ab}{}^k(t')n_{ab}{}^l(t')}{r_{ab}(t')}+\sum_a\frac{p_{ak}(t')p_{al}(t')}{m_a}\right]$$

$$\times\frac{1}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a(t'))-i\omega(t-t')}\frac{d^3k d\omega dt'}{(2\pi)^4}$$

$$-\frac{1}{2}G_{\mathrm{ret}}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\nabla(\chi_{,kl}\nabla\phi^{(2)}-\phi^{(2)}\nabla\chi_{,kl}) \tag{6-110}$$

を得る．本節では，重力輻射の最低次の寄与を求めたいので，(6-110)の右辺の第 2 項の発散項の寄与は第 1 項に比して無視できる．

条件(6-107)より $|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}_a|\sim D/\lambda\!\!\!^{-}\ll 1$ なので $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}_a}=1-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}_a+\cdots$ と展開すると，最低次の寄与は物体系の四重極モーメントから生じることがわかる．すなわち，次のテンソル型の恒等式

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_a m_a z_a{}^i z_a{}^j=\sum_a m_a\dot{z}_a{}^i\dot{z}_a{}^j+\frac{1}{2}\sum_a m_a(\ddot{z}_a{}^i z_a{}^j+z_a{}^i\ddot{z}_a{}^j)$$

に運動方程式を適用することによって得られる関係式

$$\sum_a\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\frac{n_{ab}{}^i n_{ab}{}^j}{r_{ab}}=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\Big(\sum_a m_a z_a{}^i z_a{}^j\Big)+O(c^{-2}) \tag{6-111}$$

を用いると，上述の展開の最初の項は

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}=\frac{8\pi G}{3c^4}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\int\ddot{Q}_{kl}(t')\frac{1}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(t-t')}\frac{d^3k d\omega dt'}{(2\pi)^4} \tag{6-112}$$

となる．ここで，Q_{ij} は物体系の**四重極モーメント**で

$$Q_{ij}=\sum_a m_a(3z_a{}^i z_a{}^j-\delta_{ij}z_a{}^2) \tag{6-113}$$

で定義される．(6-112)を導く際に，TT-射影演算子の性質 $\delta^{\mathrm{TT}kk}{}_{ij}=0$ を利用した．また，Q_{ij} は $Q_{ii}=0$ の性質を有する．

radiation zone での h_{ij}^{TT} の表示を得るために

（i）　**Legendre 展開**

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)i^l j_l(kr)$$

（P_l は Legendre の多項式，j_l は球面 Bessel 関数）

（ii） **積分公式**

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta = 2\delta_{l0}$$

（iii） **漸近展開**

$$j_0(kr)\xrightarrow[kr\gg 1]{}\frac{1}{2ikr}(e^{ikr}-e^{-ikr})$$

を利用して $\boldsymbol{k}$ の角度積分を行うと

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}=\frac{G}{3ic^4\pi^2}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\int\frac{\ddot{Q}_{kl}(t')}{r}\frac{k}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{i\omega(t'-t)}(e^{ikr}-e^{-ikr})dkd\omega dt'$$

となる．ω に関する積分は，複素 ω 平面上で積分路を，$t'-t>0$ では図 6-1a のように上半面にとり，$t'-t<0$ では図 6-1b のように下半面にとることによって実行され

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{i\omega(t'-t)}=\frac{i\pi c}{k}\{e^{ick(t'-t)}-e^{-ick(t'-t)}\}\theta(t-t')$$

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

となる．さらに，k，t に関する積分を行うと最終的に radiation zone での重力波は

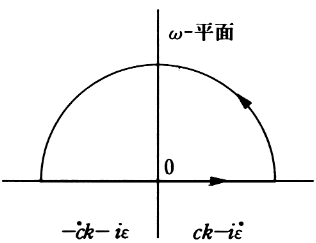


図 6-1a

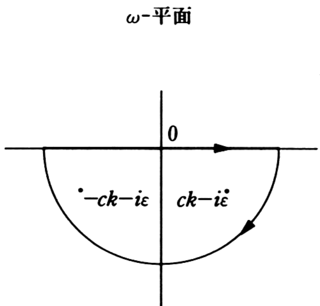


図 6-1b

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij}=\frac{2G}{3c^4}\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\frac{\ddot{Q}_{kl}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r} \tag{6-114}$$

となる．これは，c^{-4} 次の四重極輻射であり，入射波が存在しないという条件を満足している．

なお，動径 r の方向に伝播する波動に対して TT- 射影演算の結果は

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij}=\frac{2G}{3c^4}\cdot\frac{\ddot{Q}^{\mathrm{TT}}_{ij}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{6-115}$$

と表わされる．ここで，$\ddot{Q}^{\mathrm{TT}}_{ij}$ は

$$\ddot{Q}^{\mathrm{TT}}_{ij}=\ddot{Q}_{kl}\left(P_{ik}P_{jl}-\frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}\right),\quad P_{ij}=\delta_{ij}-\frac{x^ix^j}{r^2} \tag{6-116}$$

で定義される量である．

次に，near zone における反作用の場 $(h^{\mathrm{TT}}_{ij})_{\mathrm{reac}}$ を計算する．(6-106) において，$G_{\mathrm{ret}}=\Delta^{-1}+(G_{\mathrm{ret}}-\Delta^{-1})$ と分解し，再び (6-108) を用い，Fourier 積分の表示にすると

$$(h^{\mathrm{TT}}_{ij})_{\mathrm{reac}}=\frac{16\pi G}{c^4}\int\left[-\frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\frac{n_{ab}{}^in_{ab}{}^j}{r_{ab}}+\sum_a\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a}\right]^{\mathrm{TT}}_{t'}$$

$$\times\frac{\omega^2}{c^2k^2}\cdot\frac{1}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a(t))-i\omega(t-t')}\frac{d^3kd\omega dt'}{(2\pi)^4}$$

$$-\frac{1}{2}(G_{\mathrm{ret}}-\Delta^{-1})\delta^{\mathrm{TT}kl}{}_{ij}\nabla(\chi_{,kl}\nabla\phi^{(2)}-\phi^{(2)}\nabla\chi_{,kl}) \tag{6-117}$$

を得る．ここで，記号 $[\mathrm{A}_{ij}]^{\mathrm{TT}}_{t'}$ は

$$[\mathrm{A}_{ij}]^{\mathrm{TT}}_{t'}=A_{kl}(t')\left\{\left(\delta_{ik}-\frac{k_ik_k}{k^2}\right)\left(\delta_{jl}-\frac{k_jk_l}{k^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}\right)\left(\delta_{kl}-\frac{k_kk_l}{k^2}\right)\right\} \tag{6-118}$$

を表わす．再び $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}_a}$ の展開の最初の項をとり，(6-111) を用いると

$$h^{\mathrm{TT}}_{ij}(t,\boldsymbol{x})_{\mathrm{reac}}=\frac{8\pi G}{3c^4}\int[\ddot{Q}_{ij}]^{\mathrm{TT}}_{t'}\frac{\omega^2}{c^2k^2}\cdot\frac{1}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(t-t')}\frac{d^3kd\omega dt'}{(2\pi)^4} \tag{6-119}$$

となる．

(6-119)の積分は，以下の関係式を用いて実行される．

（i） near zone では $|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}|\ll 1$．

（ii） $\boldsymbol{k}$ の角度積分について

$$\int d\Omega \frac{k_i k_j}{k^2}=\frac{4\pi}{3}\delta_{ij}, \quad \int d\Omega \frac{k_i k_j k_k k_l}{k^4}=\frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$$

（iii） $$\frac{1}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}+i\varepsilon\right)^2}=\mathrm{P}\frac{1}{k^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}+\frac{i\pi}{2k}\left\{\delta\left(k-\frac{\omega}{c}\right)-\delta\left(k+\frac{\omega}{c}\right)\right\}$$

最終的に，near zone における反作用の場は c^{-5} 次からはじまり

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}(t,\boldsymbol{x})_{\mathrm{reac}}=-\frac{4G}{15c^5}\dddot{Q}_{ij}(t)+O(c^{-6}) \tag{6-120}$$

となる．この結果を用いると，輻射の反作用力(6-105)は

$$(f_{ai})_{\mathrm{reac}}=\frac{2G^2}{15c^5}m_a\sum_{b\neq a}\dddot{Q}_{kl}(t)\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}\left(m_b\frac{n_{ab}{}^k n_{ab}{}^l}{r_{ab}}\right)+\frac{4G}{15c^5}m_a\frac{d}{dt}(\dot{z}_a{}^j\dddot{Q}_{ij}) \tag{6-121}$$

となる．

ここで展開した $(f_{ai})_{\mathrm{reac}}$ の導出の特徴は

(1) 正確な ppN 近似の運動方程式に基づいて，直接，反作用力を扱っている

(2) 終始，1つの定まった座標条件のもとで計算している

ことにある．

この反作用力によって生じる物体系のエネルギー，および角運動量の消失を計算しよう．運動方程式(6-104)から，E^{ppN} を ppN 近似における物体系の定常的エネルギーとすると

$$\frac{dE^{\mathrm{ppN}}}{dt}=\sum_a (f_{ai})_{\mathrm{reac}}\frac{dz_a{}^i}{dt} \tag{6-122}$$

が導かれる．ここに(6-121)を代入し，再び(6-111)および $Q_{ii}=0$ を利用すると

$$\frac{dE^{\mathrm{ppN}}}{dt}=-\frac{G}{45c^5}\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}+\frac{4G}{15c^5}\frac{d}{dt}(\dddot{Q}_{ij}\sum_a m_a z_a{}^i z_a{}^j) \tag{6-123}$$

を得る．したがって

$$\frac{dE^{\mathrm{ppN+rad}}}{dt}=-\frac{G}{45c^4}\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij} \tag{6-124}$$

となる．ここで，$E^{\mathrm{ppN+rad}}$ は重力輻射の最低次まで考慮した物体系のエネルギーで

$$E^{\mathrm{ppN+rad}}=E^{\mathrm{ppN}}-\frac{4G}{15c^5}\dddot{Q}_{ij}\sum_a m_a z_a{}^i z_a{}^j \tag{6-125}$$

で与えられる．(6-124)について，物体系の運動の周期に比して十分長い時間にわたる時間平均をとると

$$\left\langle\frac{dE^{\mathrm{PPN+rad}}}{dt}\right\rangle=-\frac{G}{45c^4}\langle\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}\rangle \tag{6-126}$$

となる．これが，重力輻射による単位時間当りの物体系のエネルギーの消失を与える四重極公式で，Einstein によって最初に導かれたものである．(彼の導出法は重力波の運ぶエネルギーの流れの密度の計算によっており，後に述べる方法に類似している．)

同様の計算によって，単位時間当りの物体系の角運動量の消失が求められる．

$$\begin{aligned}\frac{dL_i}{dt}&=\frac{d}{dt}\Big(\sum_a\epsilon_{ijk}z_a{}^j p_{ak}\Big)\\&=\sum_a\epsilon_{ijk}(\dot{z}_a{}^j p_{ak}+z_a{}^j\dot{p}_{ak})\end{aligned} \tag{6-127}$$

に対して，方程式(6-100)，(6-103)および反作用場の解(6-120)を代入し，(6-111)および $Q_{ii}=0$ を利用すると，

$$\frac{dL_i^{\mathrm{ppN+rad}}}{dt}=-\frac{2G}{45c^5}\epsilon_{ijk}\ddot{Q}_{jl}\dddot{Q}_{lk} \tag{6-128}$$

が導かれる．したがって，時間平均に対して

$$\left\langle\frac{dL_i^{\mathrm{ppN+rad}}}{dt}\right\rangle=-\frac{2G}{45c^5}\epsilon_{ijk}\langle\ddot{Q}_{jl}\dddot{Q}_{lk}\rangle \tag{6-129}$$

が成り立つ．

(6-126)と(6-129)は物体系から消失するエネルギーと角運動量を表わしているが，これらは重力波によって遠方に運ばれるエネルギー，角運動量に等しいはずである．このことを直接確かめてみよう．

正準変換の generator の表示(6-29)～(6-31)から，エネルギーおよび運動量は次のように無限遠方での表面積分の形で表わされる：

$$E = -\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x \,\triangle h^{\mathrm{T}} = -\frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x (\triangle g_{ii} - g_{ij,ij})$$

$$= \frac{c^4}{16\pi G}\int_{s(2)} dS_i (g_{ij,j} - g_{jj,i}) \tag{6-130}$$

$$P^i = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^3x (-2\pi^{ij}{}_{,j}) = \frac{c^3}{16\pi G}\int_{s(2)} dS_j (-2\pi^{ij}) \tag{6-131}$$

この $P^\mu = (E/c, \boldsymbol{P})$ は，無限遠方での境界条件*)

$$g_{\mu\nu} \xrightarrow[r\to\infty]{} \eta_{\mu\nu} + O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{6-132}$$

のもとでの一般的表現である．すなわち，(6-130)，(6-131)は，条件(6-132)を満たすすべての座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$（ただし，無限遠での Lorentz 変換は含まない)のもとで不変であることが示される．なおその際，表面積分中に生じる振動項については平均操作の処法が必要となるので，以下ではこれを記号$\langle \quad \rangle$で表わす**)．

次に，(6-130)を用いて radiation zone（r.z. と略す)において重力波の運ぶエネルギーの流束(flux) $-dE/dt$ を計算する．radiation zone においては $(g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})$ および π^{ij} のすべての成分は，高々 $\sim a/r$ であり，場の方程式(6-22)，(6-23)のすべての非線形項は $O(1/r^2)$ となる．したがって，

$$\partial_0 g_{ij} = 2\left(\pi^{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\pi^{ll}\right) + N_{i,j} + N_{j,i} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{6-133}$$

$$\partial_0 \pi^{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij,kk} + g_{kk,ij} - g_{ik,kj} - g_{jk,ki}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(g_{kk,ll} - g_{kl,kl})$$
$$- (\delta_{ij}N_{0,kk} - N_{0,ij}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{6-134}$$

となる．(6-130)と(6-133)より，半径 $r \gg \lambda\!\!\!^{-}$ の球面から流れ出るエネルギー flux の時間平均に対して

---

*) ここで採用する座標系は無限遠で Lorentz 系となるものであり，極座標系は除かれる．

**) たとえば $\int_{s(2)} dS_i \langle f_i \rangle = \lim_{R,T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} dt \frac{1}{R}\int_R^{2R} dr \int dS_i f_i$

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle=\frac{c^5}{16\pi G}\int_{\text{r.z.}}(-2n^i\langle\pi^{ij}{}_{,j}\rangle)r^2d\Omega \tag{6-135}$$

が導かれる．ここで，$c^5/16\pi G\cdot(-2\pi^{ij}{}_{,j})$ は Poynting ベクトルであり，$dS_i=n^ir^2d\Omega$，$n^i=x^i/r$ を用いた．さらに，拘束方程式(6-21)から r.z. での表面積分(6-135)に寄与する項を取り出し，再び(6-133)を用いると

$$\pi^{ij}{}_{,j}\underset{\text{r.z.}}{=}-\frac{1}{4}(h^{\text{TT}}_{ij,l}+h^{\text{TT}}_{li,j}-h^{\text{TT}}_{jl,i})h^{\text{TT}}_{jl,0}+O\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{6-136}$$

となる．(この節では座標条件(6-44)，(6-45)のもとで計算しており，また118ページの脚注の radiation zone の定義の(3)の条件が大切である．) r.z. での解(6-115)から

$$h^{\text{TT}}_{ij,k}=-\frac{1}{c}\dot{h}^{\text{TT}}_{ij}n^k+O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$=-\frac{2G}{3c^5}\frac{\dddot{Q}^{\text{TT}}_{ij}\left(t-\dfrac{r}{c}\right)}{r}n^k+O\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{6-137}$$

となるので，これらの解を(6-135)に代入し角度積分を実行すると

$$-\langle\frac{dE}{dt}\rangle=\frac{c^3}{16\pi G}\int_{\text{r.z.}}\langle\frac{1}{2}\dot{h}^{\text{TT}}_{ij}\dot{h}^{\text{TT}}_{ij}\rangle r^2d\Omega=\frac{G}{45c^5}\langle\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}\rangle \tag{6-138}$$

となる．これは物体系のエネルギーの消失の割合と一致する．物体の運動から失われるエネルギーは途中で弱まることなく，重力波によって遠方に運ばれている．

角運動量についても同様に計算される．P^i の表示(6-131)から，角運動量の表面積分による表示は

$$M^{ij}=\int(x^idP^j-x^jdP^i)$$

$$=\frac{c^3}{16\pi G}(-2)\int_{S_{(2)}}dS_k(x^i\pi^{jk}-x^j\pi^{ik}) \tag{6-139}$$

である．$L_i=1/2\epsilon_{ijk}M^{jk}$ に対して場の方程式(6-134)を用いると，(今度は(6-134)の r^{-3} のオーダーの項が寄与する．(6-134)の線形近似では $\partial_0\pi^{kl}{}_{,l}=0$ となるので右辺の展開の2次の項が必要となる)，少し長い計算の後

$$-\langle\frac{dL_i}{dt}\rangle=\frac{c^4}{16\pi G}\int_{\text{r.z.}}\epsilon_{ijk}x^j\langle(\dot{h}^{\text{TT}}_{lm}h^{\text{TT}}_{lk})_{,m}-\dot{h}^{\text{TT}}_{lm}h^{\text{TT}}_{lm,k}\rangle r^2d\Omega \tag{6-140}$$

を得る．(6-115)を代入し角度積分を行うと

$$-\langle\frac{dL_i}{dt}\rangle=\frac{2G}{45c^4}\epsilon_{ijk}\langle\ddot{Q}_{jl}\dddot{Q}_{lk}\rangle \tag{6-141}$$

となり，物体系から失われる角運動量の割合と一致する．

以上の結果は全系のエネルギー，角運動の保存則を考えれば当然の結論である．したがって，逆に保存則から，重力場のエネルギー・運動量擬テンソル $t^{\mu\nu}$ を用いて r.z. における flux を計算することができる．Landau-Lifshitz の $t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{LL}}$ (4-63)を用いると，r.z. では $T^{\mu\nu}$ は寄与しないので，保存則(4-64)から

$$\frac{dE}{dt}=c\int_{\mathrm{r.z.}}(-{}^4g)t^{0i}{}_{\mathrm{LL}}n^ir^2d\Omega \tag{6-142}$$

$$\frac{dL_i}{dt}=\int_{\mathrm{r.z.}}\epsilon_{ijk}(-{}^4g)x^jt^{kl}{}_{\mathrm{LL}}n^lr^2d\Omega \tag{6-143}$$

となり，振動項に対する平均操作のもとで計算すると，上記と同一の結果が導かれる．

最後に輻射の反作用力についての従来の計算方法を述べておく［5］．重力波のエネルギー flux (6-138)が，物体間に働く一種の摩擦力 $\boldsymbol{f}_a^{\mathrm{eff}}$ による仕事の結果生じるエネルギーの減衰によるものであるとすると

$$\langle\frac{dE}{dt}\rangle=\langle\sum_a\boldsymbol{f}_a^{\mathrm{eff}}\cdot\dot{\boldsymbol{z}}_a\rangle \tag{6-144}$$

で与えられる．一方(6-138)から，時間の全微分項の時間平均は零であることを利用すると

$$\langle\frac{dE}{dt}\rangle=-\frac{G}{45c^5}\langle\dot{Q}_{ij}Q^{(5)}{}_{ij}\rangle,\quad Q^{(5)}{}_{ij}=\frac{d^5}{dt^5}Q_{ij} \tag{6-145}$$

となる．$\dot{Q}_{ij}=\sum_a m_a(3\dot{z}_a{}^iz_a{}^j+3z_a{}^i\dot{z}_a{}^j-2\delta_{ij}(\boldsymbol{z}_a\cdot\dot{\boldsymbol{z}}_a))$ を代入し(6-144)と比較することにより

$$f_{ai}^{\mathrm{eff}}=-\frac{2G}{15c^5}m_az_a{}^jQ^{(5)}{}_{ij} \tag{6-146}$$

が導かれる．これは一種の平均操作の上での有効反作用力であり，厳密な輻射反作用力は(6-121)で与えられる．

§ 6-4　Wheeler-DeWitt 方程式

前節まで見たように，多体系の古典的運動を議論するのに ADM の理論形式はきわめて有効である．一方，重力場の量子論についてはどうであろうか．

重力場を量子化する根拠としては，重力波の存在や平坦時空における場の理論の無限大の困難を除去する可能性などの他に，初期宇宙論を挙げておかねばならない．近年，素粒子物理学や宇宙物理学の研究対象となっている宇宙のきわめて初期（たとえば $t \sim 10^{-43}$sec）は，重力の関与する現象と他の諸々の量子論的現象とが共存する世界なので，そこでは重力も量子化して扱う必要が生じる．

Heisenberg と Pauli 以来の量子化の一般的処法に従えば，(6-39)～(6-42)の正準方程式を Poisson 括弧によって記述し，その Poisson 括弧を演算子の交換子と置き換えることによって量子論が構成される．ところが，重力場の Hamilton 関数は非線形なので，q- 数(演算子)の順序(ordering)をどのように矛盾なく定めるかという問題が常につきまとう．また，ADM の正準理論では，重力場の真の力学変数である横波成分を取り出して理論を構成しており，理論としては整備されているが，一般相対論の全体像を記述するという意味では見通しが良いとはいえない．特に，${}^4g_{0\mu}$ を決める方程式は正準理論の中に含まれていない．しかし，Lorentz 変換を考えると，${}^4g_{0\mu}$ を決める方程式も量子論の方程式として扱わねばならない．

このような点から，量子化については 4 次元の形式に戻り，共変的な量子化を行う方がよさそうに思われる．これについては第 8 章で詳しく述べることとし，本節では (3+1) 次元形式ではあるが，ADM とは少し異なる理論形式をとり上げる．

作用関数(6-13)に戻り，重力場の Lagrange 関数

$$L = \int d^3x \boldsymbol{L} = \frac{c^4}{16\pi G}\int d^3x(\pi^{ij}\partial_0 g_{ij} + N_0 R^0 + N_i R^i) \tag{6-147}$$

からはじめよう．形式的には力学変数は N_0，N_i，g_{ij}，π^{ij} の16個であり，これらに対応する正準共役運動量密度を，それぞれ，p^0，p^i，p^{ij}，P_{ij} とすると，

$$p^0 = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{N}_0} \approx 0 \tag{6-148 a}$$

$$p^i = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \dot{N}_i} \approx 0 \tag{6-148 b}$$

$$p^{ij}=\frac{\partial L}{\partial \dot{g}_{ij}}\approx\frac{c^3}{16\pi G}\pi^{ij} \tag{6-148 c}$$

$$P_{ij}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\pi}^{ij}}\approx 0 \tag{6-148 d}$$

となり，Hamilton 関数は

$$H=\int d^3x(p^0\dot{N}_0+p^i\dot{N}_i+p^{ij}\dot{g}_{ij}+P_{ij}\dot{\pi}^{ij})-L$$

$$=\int d^3x\left\{p^0\dot{N}_0+p^i\dot{N}_i+\left(p^{ij}-\frac{c^3}{16\pi G}\pi^{ij}\right)\dot{g}_{ij}\right.$$

$$\left.+P_{ij}\dot{\pi}^{ij}-\frac{c^4}{16\pi G}(N_0R^0+N_iR^i)\right\} \tag{6-149}$$

で与えられる．ここで，(6-148 a ～ d)は拘束条件で，≈記号は第１章で述べた弱い等式である．

正準方程式は16組の正準変数（N_0，p^0)，(N_i，p^i)，(g_{ij}，p^{ij})，(π^{ij}，P_{ij}) に対する Poisson 括弧を使って計算される．弱い等式は Poisson 括弧をとった後に，はじめて 0 とおかれる*)．ところで，(6-148 c)および(6-148 d)は第２類の拘束条件式**)であり，Dirac 括弧を用いることによりこれらは強い等式として扱われ π^{ij} は理論の中から消去される．その結果，理論は10組の正準変数（N_0，p^0)，(N_i，p^i)，(g_{ij}，p^{ij}) によって，Hamilton 関数

$$H=\int d^3x\left\{p^0\dot{N}_0+p^i\dot{N}_i-\frac{c^4}{16\pi G}(N_0R^0+N^iR^i)\right\} \tag{6-150}$$

で記述される．(R^μ 中の π^{ij} は p^{ij} で書き直してある．) この時，拘束条件は(6-148 a)および(6-148 b)である．以上の考察を基に，拘束系の力学の一般的定式化に沿って理論が整備されるが，それについては第１章の文献［２］を参照されたい．この形式と ADM の正準形式との違いについては，後に述べる．

さて，拘束条件(6-148 a , b)は時間が経過しても保たれていなければならない．

---

*) 正確には，$\dot{N}_0$，$\dot{N}_i$，$\dot{g}_{ij}$，$\dot{\pi}^{ij}$ は正準変数(N_0，…，P_{ij})の未定関数なので，$\dot{N}_0=v_0$，$\dot{N}_i=v_i$，$\dot{g}_{ij}=u_{ij}$，$\dot{\pi}_{ij}=\Lambda^{ij}$ とおき，v_0，…，Λ^{ij} を未定関数とする全 Hamilton 関数によって系の運動は記述される．

**) §1-2を参照．

この定常性の要請

$$\dot{p}^0 \approx 0, \qquad \dot{p}_i \approx 0 \tag{6-151}$$

は，正準方程式が解を持つための必要条件である．Hamilton 関数(6-150)および Poisson 括弧を用いて計算すると，(6-151)は

$$R^0 \approx 0 \tag{6-152}$$

および

$$R^i \approx 0 \tag{6-153}$$

となる．これは ADM 理論の拘束方程式(6-20), (6-21)と同じである．(ただし，ここではまだ物質系は考えていない．) (6-148 a，b)の高階微分から生じる条件は，1階微分までの条件と Bianchi 恒等式とによって満足されるので，理論全体の拘束条件は2個の1次拘束条件(6-148 a)，(6-148 b)と2個の2次拘束条件の合計4個となる．後者は系の dynamics に関わる内容を含んでいる．

量子化に際して，これらの拘束条件は状態ベクトル Ψ に対する付加条件

$$p^0\Psi = 0 \tag{6-154 a}$$

$$p^i\Psi = 0 \tag{6-154 b}$$

$$R^0\Psi = 0 \tag{6-154 c}$$

$$R^i\Psi = 0 \tag{6-154 d}$$

となる．Schrödinger 表示では

$$p^0 = -i\hbar\frac{\delta}{\delta N_0}, \quad p^i = -i\hbar\frac{\delta}{\delta N_i}, \quad p^{ij} = -i\hbar\frac{\delta}{\delta g_{ij}} \tag{6-155}$$

と置き換えられ，Ψ は N_0，N_i，g_{ij} の汎関数である．

1次の拘束条件(6-154 a，b)は，Ψ が g_{ij} のみに依存することを示す．また，(6-154 d)は(6-154 c)が異なる空間点で両立するための条件(Integrability condition) となっている*)．(6-154 c)は **Wheeler-De Witt 方程式**と呼ばれる1つの汎関数微分方程式

$$\left(\frac{16\pi G\hbar^2}{c^2}G_{klmn}\frac{\delta^2}{\delta g_{kl}\delta g_{mn}} - \frac{c^4}{16\pi G}g^{1/2}R\right)\Psi[g_{ij}] = 0 \tag{6-156}$$

を与える．ただし，

---

*) 拘束方程式(6-154 a)～(6-154 d)全体が異なる空間点で両立することは，作用関数の一般座標変換に対する不変性によって保証されている．

$$G_{klmn}=\frac{1}{2}g^{-1/2}(g_{km}g_{ln}+g_{kn}g_{lm}-g_{kl}g_{mn}) \tag{6-157}$$

である［6］.

この G_{klmn} は（i）(kl) および (mn) の（　）の中の添字のいれ換えに対して対称であり，かつ（ii）(kl) と (mn) の交換に対して不変である．したがって，$G_{(kl)(mn)}$ と添字をまとめると6×6の行列となり，6次元空間の計量が導入されたことになる．この計量が$(-,\ +,\ +,\ +,\ +,\ +)$型であることが次のようにしてわかる：

> $g_{ij}=\delta_{ij}+h_{ij}$ とおくと，$G_{(kl)(mn)}=G^{(0)}{}_{(kl)(mn)}+O(h)$，$G^{(0)}{}_{(kl)(mn)}=1/2\,(\delta_{km}\delta_{ln}+\delta_{kn}\delta_{lm}-\delta_{kl}\delta_{mn})$ となる．この $G^{(0)}{}_{(kl)(mn)}$ の構造を調べると，対角成分 $U_{(kl)}=\delta_{kl}U$ に対して $G^{(0)}{}_{(kl)(mn)}U_{(mn)}=-1/2\,U_{(kl)}$，対角和が零の5個の成分 $V_{(kl)}=\left\{\xi_k\eta_l+\xi_l\eta_k-2/3\,\delta_{kl}(\xi\eta)\right\}V$ に対して $G^{(0)}{}_{(kl)(mn)}V_{(mn)}=V_{(kl)}$ となる．

以上の事から，Wheeler-De Witt 方程式は双曲型の微分方程式である．

次に物質系としてスカラー場を考えよう．その作用関数は

$$I_m=\frac{1}{c}\int d^4x\left[p\dot{\phi}-\frac{N_0}{2}\left\{g^{-1/2}p^2+c^2g^{1/2}g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi+c^2g^{1/2}V(\phi)\right\}-cp(N^i\partial_i\phi)\right] \tag{6-158}$$

で与えられる．ここで，$p=N_0^{-1}g^{1/2}(\dot{\phi}-cN^i\partial_i\phi)$ は ϕ に正準共役な運動量密度，$V(\phi)$ はポテンシャル項を表わす*)．したがって，全系の Lagrange 関数は

$$L=\int d^3x\left\{p^{ij}\dot{g}_{ij}+p\dot{\phi}+\frac{c^4}{16\pi G}(N_0R^0+N_iR^i)\right\} \tag{6-159}$$

となる．ただし，R^0，R^i はスカラー場の寄与を含み

$$R^0=-g^{1/2}R+\left(\frac{16\pi G}{c^3}\right)^2g^{-1/2}\left\{\frac{1}{2}(g_{ij}p^{ij})^2-g_{ik}g_{jl}p^{ij}p^{kl}\right\}$$
$$-\left(\frac{16\pi G}{c^4}\right)\frac{1}{2}\{g^{-1/2}p^2+c^2g^{1/2}g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi+c^2g^{1/2}V(\phi)\} \tag{6-160}$$

---

*）(6-158)は $I_m=-c/2\int d^4x\sqrt{-{}^4g}\{{}^4g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+V(\phi)\}$ を ADM の変数および ϕ，p を用いて時間の1次微分について線形な形に書き直したものである．

$$R^i = \frac{16\pi G}{c^3}(2p^{ij}{}_{|j} - pg^{ij}\partial_j\phi) \tag{6-161}$$

である．

ここから議論は重力場のみの場合と同様に展開され，量子化によって 2 次拘束条件から導かれる Wheeler-De Witt 方程式は次のようになる：

$$\left(\frac{16\pi G\hbar^2}{c^2}G_{klmn}\frac{\delta^2}{\delta g_{kl}\delta g_{mn}} - \frac{c^4}{16\pi G}g^{1/2}R - T\right)\Psi[g_{ij}, \phi] = 0 \tag{6-162}$$

ただし

$$T = -\frac{\hbar^2}{2}g^{-1/2}\frac{\delta^2}{\delta\phi\delta\phi} + \frac{c^2}{2}g^{1/2}g^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + \frac{c^2}{2}g^{1/2}V(\phi) \tag{6-163}$$

であり，状態ベクトル Ψ は g_{ij} および ϕ の汎関数となる．

Wheeler-De Witt 方程式は量子宇宙論の基礎方程式として用いられているが，いくつかの問題点がある．

(1)　双曲型の方程式であるから，平坦時空における Klein-Gordon 方程式の場合と同様に，正定値の保存する確率密度が存在しない．

(2)　時間的座標は導入できるが，本来の時間座標 t は含まれていない．

(3)　方程式を解くことが困難である．

(4)　演算子の ordering の問題は依然として残っている．

(3)については，全体の量子重力からほとんどの自由度を凍結し，ごく少数の自由度に制限して方程式を解くことが試みられている．たとえば，Robertson-Walker 型計量

$$ds^2 = N_0{}^2(t)(dx^0)^2 + \frac{a(t)^2}{r_0{}^2}\left(1 + k\frac{r^2}{4r_0{}^2}\right)^{-2}(d\boldsymbol{x})^2 \tag{6-164}$$

のスケール因子 $a(t)$（宇宙の半径）を考える．（r_0 は長さの次元を持つ定数，k は 0 または ± 1 をとる．）$k=1$ の閉じた有限宇宙で，かつ空間的に一様なスカラー場 $\phi(t)$ の場合には，作用関数中の空間積分が実行できて，Lagrange 関数(6-159)は

＊）(4)で述べたように，$\partial/\partial a$ と a の ordering の問題がある．左辺の第 1 項は，1 次元の Laplace-Beltrami 演算子となるように $(\hbar^2/2)a^{-1/4}(\partial/\partial a)a^{-1/2}(\partial/\partial a)a^{-1/4}$ とおかれる．

$$L = p_a\dot{a} + p_\phi\dot{\phi} + N_0\left\{\left(\frac{2G}{3c^2\pi}\right)\frac{1}{2a}p_a{}^2 + \left(\frac{3c^2\pi}{2G}\right)\frac{c^2}{2}a + \frac{1}{2\pi^2}\left(-\frac{1}{2a^3}p_\phi{}^2\right)\right.$$
$$\left. + 2\pi^2\left(-\frac{1}{2}c^2a^3V(\phi)\right)\right\} \qquad (6\text{-}165)$$

となる．ここで，$p_a = (-3c^2\pi/2G)(a\dot{a}/N_0)$ および $p_\phi = 2\pi^2\cdot a^3\dot{\phi}/N_0$ はそれぞれ a および ϕ に正準共役な運動量である．

表示を簡単にするために $2G/3\pi = c = 1$ の単位系をとり，スカラー場に関して

$$\tilde{\phi} = \sqrt{2\pi^2}\,\phi, \quad p_{\tilde{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}}p_\phi, \quad \tilde{V} = 2\pi^2 V$$

を用いると Lagrange 関数は

$$L = p_a\dot{a} + p_{\tilde{\phi}}\dot{\tilde{\phi}} + N_0\left\{\frac{1}{2a}p_a{}^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2a^3}p_{\tilde{\phi}}{}^2 - \frac{1}{2}a^3\tilde{V}(\tilde{\phi})\right\} \qquad (6\text{-}166)$$

と表わされ，拘束条件 $\partial L/\partial N_0 \approx 0$ から導かれる Wheeler-De Witt 方程式は

$$\left(\frac{\hbar^2}{2a}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{2a^3}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\phi}^2} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a^3\tilde{V}(\tilde{\phi})\right)\Psi[a, \tilde{\phi}] = 0 \qquad (6\text{-}167)$$

となる*)．宇宙の発展を記述するモデルとして，この種の方程式の解の研究が進められている．

終りに，Wheeler-De Witt 形式と ADM 形式との相違についてふれる．ADM 形式では，拘束条件式(6-152)，すなわち $R^0 \approx 0$ との Poisson 括弧が零とならぬように座標条件が設定された．したがって，これらの条件式は第 2 類拘束条件式であり，Wheeler-De Witt 方程式(6-154 c)，あるいは(6-162)は ADM 理論においては成り立たない．代りに ADM では，$R^0 \approx 0$ を Dirac 括弧の意味で強い等式にし，これを解くことによって(6-50)の Hamilton 関数を真の力学変数の関数として求め，この変数に対する Heisenberg 型の運動方程式を基にして量子化へ移行した．(§ 1-2 の相対論的点粒子の項を参照されたい．) この意味で，ADM に比べて，Wheeler-De Witt では時間を導入することは難しい問題である．

第7章　運動方程式とその解

この章では，ppN 近似における2体系の運動方程式を解き，近星点移動（periastron advance）などの主要な観測量の値を求める．また2体系の運動方程式に関連するいくつかの問題を扱う．

§7-1　慣性中心の座標

一般相対論における2体系の運動方程式を解く際に，もし Newton 力学の場合と同じく，質量がそれぞれ m_1 と m_2 である物体の座標 $\boldsymbol{z}_1$，$\boldsymbol{z}_2$ を質量中心の座標 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}}=(m_1\boldsymbol{z}_1+m_2\boldsymbol{z}_2)/(m_1+m_2)$ と相対座標 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2$ とに分離すると

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}}}{dt^2}\neq 0 \tag{7-1}$$

となる．実際，pN 近似ではじめて2体系の運動方程式を解き，近星点移動の値を求めた Robertson は $\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}}$ を用いたために，質量中心の加速度 $d^2\boldsymbol{R}_{\mathrm{CM}}/dt^2$ のほぼ周期的な軌道運動に対する永年変化を議論しなければならなかった[1]．

けれども，われわれにとって便利なのは，常に

$$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}=0 \tag{7-2}$$

を満足する座標$\boldsymbol{R}$である．このような座標$\boldsymbol{R}$が定まれば，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}&=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\\&=0\end{aligned} \tag{7-3}$$

となる座標系を選ぶことができる．以後この$\boldsymbol{R}$を**慣性中心**（Center of Inertia，略して C.I. と記す）**の座標**と呼び，常に $\boldsymbol{V}=0$ である座標系を**慣性中心の座標系**（C.I. 座標系）と呼ぶことにする．

さて，運動方程式を直接変形して（7-2）を満足する$\boldsymbol{R}$を捜すこともできるが，ここでは§4-3で述べた重力場のエネルギー擬テンソル密度を利用する[2]．

多数の物体から成る閉じた系全体の一様運動は，対応する作用積分の無限小座標変換に対する不変性と関係している．たとえば，相対座標の関数であるポテンシャルから導かれる力の下で運動する Newton 力学系においては，この無限小変換は相対運動をする慣性系の間の Galilei 変換である．また，相互作用のない物体から成る特殊相対論的系に対しては，この変換は 4 次元空間内の無限小回転である．すなわち．4 次元無限小回転に対する不変性から 4 次元角運動量 $M^{\mu\nu}$ の保存則が導かれるが，その M^{0i} 成分の保存則は

$$\sum_a \left(t\boldsymbol{p}_a - \frac{E_a \boldsymbol{z}_a}{c^2} \right) = \text{一定} \tag{7-4}$$

となる．この式は

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_a E_a \boldsymbol{z}_a}{\sum_a E_a} \tag{7-5}$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{c^2 \sum_a \boldsymbol{p}_a}{\sum_a E_a} \tag{7-6}$$

を用いると

$$\boldsymbol{R} - \boldsymbol{V}t = \text{一定} \tag{7-7}$$

と書き表わされる．ここで $\sum_a \boldsymbol{p}_a$ および $\sum_a E_a$ は系の全運動量と全エネルギーで共に保存量であるから（7-6）で定義される $\boldsymbol{V}$ は系全体の速度を表わし，かつ一定である．したがって（7-5）で定義される座標 $\boldsymbol{R}$ は（7-2）を満足する．

重力相互作用がある場合への一般化は §4-3 の（4-76）および（4-77）で与えられるので，（4-77）の C.I. 座標 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{LL}}$ の具体的表示を ppN 近似で求めよう．(5-4)，(5-8)，(5-16) から $-(-g)T^{00}$ の $h^{(n)}_{\mu\nu}$ による展開を必要なオーダーまで取ると*)

$$\begin{aligned}
-(-g)T^{00} = \sum_a m_a c^2 \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_a) \bigg[& 1 + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h^{(2)}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\boldsymbol{v}_a{}^2}{c^2} + h^{(2)}_{00} \right\} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h^{(3)}_{\alpha\beta} \\
& + \frac{1}{2}\{ 2h^{(2)}_{0i} \frac{v_a{}^i}{c^2} + h^{(3)}_{00} \} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h^{(4)}_{\alpha\beta} \\
& + \frac{1}{8}(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - 2\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}) h^{(2)}_{\alpha\beta} h^{(2)}_{\gamma\delta}
\end{aligned}$$

---

*）（1-29）からわかるように，本書では $\sqrt{-g}\, T^0{}_0$ がエネルギー密度となるように符号を定めている．

$$+\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}h^{(2)}_{\alpha\beta}\left\{\frac{v_a{}^2}{c^2}+h^{(2)}_{00}\right\}+\frac{1}{2}\left\{h^{(2)}_{ij}\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{c^2}+2h^{(3)}_{0i}\frac{v_a{}^i}{c}+h^{(4)}_{00}\right\}$$

$$+\frac{3}{8}\left\{\frac{v_a{}^2}{c^2}+h^{(2)}_{00}\right\}^2\Bigg]+O(c^{-3}) \qquad (7\text{-}8)$$

となる．また次節では座標条件 (5-146) のもとで定められる Lagrange 関数 (Hamilton 関数) によって記述される運動を解析するので，この場合には $h^{(2)}_{ij}=\delta_{ij}h^{(2)}_{00}$ であり，よって $-(-g)t^{00}{}_{\mathrm{LL}}$ の展開は次のようになる：

$$-(-g)t^{00}{}_{\mathrm{LL}}=\frac{c^4}{16\pi G}\Big[-\frac{7}{2}h^{(2)}_{00,i}h^{(2)}_{00,i}-\frac{3}{2}h^{(2)}_{00,0}h^{(2)}_{00,0}+2h^{(2)}_{00,0}h^{(3)}_{0i,i}$$

$$-h^{(3)}_{0i,i}h^{(3)}_{0j,j}+\frac{1}{2}h^{(3)}_{0i,j}h^{(3)}_{0i,j}+\frac{1}{2}h^{(3)}_{0i,j}h^{(3)}_{0j,i}$$

$$+h^{(2)}_{00,i}\{2h^{(4)}_{ij,j}-3h^{(4)}_{jj,i}\}\Big]+O(c^{-3}) \qquad (7\text{-}9)$$

付録 A-7 に与えられている解を代入し，付録 A-6 の積分公式 (A6-7)，(A6-8)，(A6-11) を用いると，$\boldsymbol{R}_{\mathrm{LL}}$ を求めるのに必要な積分が計算され

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{LL}}=\frac{1}{E_{\mathrm{pN}}(n)}\{\sum_a E_a\boldsymbol{z}_a-\frac{5G}{4c^2}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\boldsymbol{v}_a\} \qquad (7\text{-}10)$$

となる．ここで E_a は

$$E_a=m_a c^2+\frac{1}{2}m_a v_a{}^2-\frac{G}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}+\frac{3}{8}m_a\frac{(v_a{}^2)^2}{c^2}$$

$$+\frac{G^2}{4c^2}\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}+\frac{G^2}{4c^2}\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{bc}}$$

$$+\frac{G}{4c^2}\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{7\boldsymbol{v}_a{}^2-\boldsymbol{v}_b{}^2-7(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}$$

$$(7\text{-}11)$$

で与えられ，また $E_{\mathrm{pN}}(n)=\sum_a E_a$ は pN 近似における n 体系の全エネルギーである．

§4-3 で説明したように，重力場のエネルギー・運動量擬テンソルには任意性があるが，$\Lambda^{\mu\nu\lambda\rho}$ が $r\to\infty$ の弱い場の領域で同じであれば，$M^{\mu\nu}$ は同じ値を持つ．実際に Misner, Thorne, Wheeler の $t^{\mu\nu}{}_{\mathrm{MTW}}$ を用いて (4-78) の $\boldsymbol{R}_{\mathrm{MTW}}$ を計算すると

$$\boldsymbol{R}_{\text{MTW}} = \boldsymbol{R}_{\text{LL}} \tag{7-12}$$

であることがわかる．したがって今後はC.I.座標を単に$\boldsymbol{R}$と表示する．

2体系のC.I.座標は

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{E_{\text{pN}}}\left[E_1\boldsymbol{z}_1 + E_2\boldsymbol{z}_2 - \frac{5Gm_1m_2}{4c^2}\{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_1 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_2\}\right] \tag{7-13}$$

で与えられる．ここで

$$E_1 = m_1c^2 + \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1{}^2 - \frac{Gm_1m_2}{2r} + \frac{3}{8}m_1\frac{(\boldsymbol{v}_1{}^2)^2}{c^2} + \frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{4c^2r^2}$$
$$+\frac{Gm_1m_2}{4c^2r}\{7\boldsymbol{v}_1{}^2 - \boldsymbol{v}_2{}^2 - 7(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2) - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)\} \tag{7-14}$$

$$E_2 = m_2c^2 + \frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2{}^2 - \frac{Gm_1m_2}{2r} + \frac{3}{8}m_2\frac{(\boldsymbol{v}_2{}^2)^2}{c^2} + \frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{4c^2r^2}$$
$$+\frac{Gm_1m_2}{4c^2r}\{-\boldsymbol{v}_1{}^2 + 7\boldsymbol{v}_2{}^2 - 7(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2) - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)\} \tag{7-15}$$

かつ，$E_{\text{pN}} = E_1 + E_2$である．このC.I.座標は2体系のLagrange関数（(5-140)を参照）の与えるEuler-Lagrange方程式から直接導かれる結果と一致する．

2体系のC.I.座標は，系の全運動量を$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$とすると

$$\boldsymbol{P} = \frac{E_{\text{pN}}}{c^2}\boldsymbol{V} = \frac{E_{\text{pN}}}{c^2}\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$$
$$= 0 \tag{7-16}$$

で定義される．したがって$\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}$とおくと，2体系のHamilton関数（5-159）は

$$H_{\text{CI}} = Mc^2 + \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{p}^2 - \frac{M-3\mu}{8c^2\mu^3M}(\boldsymbol{p}^2)^2 + \frac{M^2-5\mu M+5\mu^2}{16c^4\mu^5M^2}(\boldsymbol{p}^2)^3 - \frac{G\mu M}{r}$$
$$+\frac{G^2\mu M^2}{2c^2r^2} - \frac{G^3\mu M^2(M+3\mu)}{4c^4r^3} - \frac{G}{2c^2\mu r}\{(3M+\mu)\boldsymbol{p}^2 + \mu(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^2\}$$
$$+\frac{G^2M}{2c^4\mu r^2}\{(5M+8\mu)\boldsymbol{p}^2 + 3\mu(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^2\}$$
$$+\frac{G}{8c^4\mu^3Mr}\{(5M^2-20\mu M-3\mu^2)(\boldsymbol{p}^2)^2 - 2\mu^2\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^2 - 3\mu^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^4\} \tag{7-17}$$

となる．ここで $M=m_1+m_2$，$\mu=m_1m_2/M$ である．

(7-17) は相対座標 $\boldsymbol{r}$ の運動を記述する Hamilton 関数であり，H_{CI} から導かれる正準方程式は，前述の2体系の Euler-Lagrange 方程式を (7-13) の $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2$ を用いて書き直したものと等価である．

§7-2　2体系の運動方程式の解と近星点移動

C.I. 座標系を選ぶことにより，2体問題は等価な1体問題に帰着され，Hamilton 関数 (7-17) によって記述される．この節では H_{CI} から静止エネルギー Mc^2 を引いたものを改めて Hamilton 関数 H とする．

時間の平行移動および空間の回転に対する Hamilton 関数の不変性は，全エネルギー

$$\widetilde{E}=H \tag{7-18}$$

および角運動量

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{7-19}$$

が保存することを保証する．

球面極座標 (r,θ,φ) の極軸を $\boldsymbol{L}$ の方向に選ぶと，運動は極軸に垂直な平面内になり，変数 θ およびそれに共役な運動量 p_θ はそれぞれ一定値 $\pi/2$ および0をとる，そして Hamilton 関数から消失する．したがって Hamilton 関数は平面極座標 (r,φ) およびそれに共役な運動量 $(p_r,\ p_\varphi)$ を用いて次のように表わされる：

$$\begin{aligned}
&H(r,\ \varphi,\ p_r,\ p_\varphi)\\
&=\frac{1}{2\mu}\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2}\right)-\frac{G\mu M}{r}-\frac{M-3\mu}{8c^2\mu^3M}\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2}\right)^2+\frac{G^2\mu M^2}{2c^2r^2}\\
&\quad-\frac{G}{2c^2\mu r}\left\{(3M+\mu)\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2}\right)+\mu p_r{}^2\right\}+\frac{\langle 1,-5,5\rangle}{16c^4\mu^5}\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2}\right)^3\\
&\quad+\frac{G^3\mu M^3}{4c^4r^3}\langle -1,-3,0\rangle+\frac{G^2M^2}{2c^4\mu r^2}\left\{\langle 5,8,0\rangle\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2}\right)+\langle 0,3,0\rangle p_r{}^2\right\}\\
&\quad+\frac{GM}{8c^4\mu^3r}\left\{\langle 5,-20,-3\rangle\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2}\right)^2\right.\\
&\quad\left.+\langle 0,0,-2\rangle\left(p_r{}^2+\frac{p_\varphi{}^2}{r^2}\right)p_r{}^2+\langle 0,0,-3\rangle p_r{}^4\right\}
\end{aligned} \tag{7-20}$$

ここで記号 $\langle a, b, c\rangle$ は

$$\langle a, b, c\rangle = a + b\frac{\mu}{M} + c\left(\frac{\mu}{M}\right)^2 \tag{7-21}$$

によって定義される．

変数 φ は循環座標なので，共役な運動量 p_φ は一定となり，角運動量 $\boldsymbol{L}$ の大きさ l に等しい．

$$p_\varphi = l. \tag{7-22}$$

正準方程式 $\dot{\varphi} = \partial H/\partial p_\varphi$ と（7-22）より

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} = \frac{l}{r^2}\Bigg[&\frac{1}{\mu} - \frac{M-3\mu}{2c^2\mu^3 M}\left(p_r{}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) - \frac{G(3M+\mu)}{c^2\mu r}\\ &+ \frac{\langle 3, -15, 15\rangle}{8c^4\mu^5 M^2}\left(p_r{}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right)^2 + \frac{G^2\langle 5, 8, 0\rangle}{c^4\mu r^2}\\ &+ \frac{G}{2c^4\mu^3 M r}\left\{\langle 5, -20, -3\rangle\left(p_r{}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right) + \langle 0, 0, -1\rangle p_r{}^2\right\}\Bigg]\end{aligned} \tag{7-23}$$

を得る．また正準方程式 $\dot{r} = \partial H/\partial p_r$ と（7-22）より，p_r を $\dot{r}$ を用いて表わすことができる．

$$\begin{aligned}p_r = \mu\dot{r}\Bigg[&1 + \frac{M-3\mu}{2c^2 M}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}\right) + \frac{G(3M+2\mu)}{c^2 r}\\ &+ \frac{\langle -1, 6, -9\rangle l^2}{2c^4\mu^2 r^2}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}\right) + \frac{GM\langle -3, 8, 3\rangle l^2}{c^4\mu^2 r^3}\\ &+ \frac{\langle 3, -21, 39\rangle}{8c^4}\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}\right)^2 + \frac{G^2 M^2\langle 4, 1, 4\rangle}{c^4 r^2}\\ &+ \frac{GM}{2c^4 r}\left\{\langle 7, -10, -14\rangle\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{\mu^2 r^2}\right) + \langle 0, 2, -2\rangle\dot{r}^2\right\}\Bigg].\end{aligned} \tag{7-24}$$

以下では§4-2の表記法に合わせて，エネルギー $\widetilde{E}$ と角運動量 l の代りに

$$E = \frac{\widetilde{E}}{\mu}, \qquad h = \frac{l}{\mu} \tag{7-25}$$

で定義される単位質量当りのエネルギーと角運動量を用いる．

(7-20)，(7-22)～(7-25) によって ppN 近似でのエネルギーは

$$
\begin{aligned}
E = {} & \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} + \frac{(M-3\mu)}{2c^2M}\dot{r}^4 + \frac{(M-3\mu)h^2}{2c^2Mr^2}\dot{r}^2 \\
& + \frac{G(2M+5\mu)}{2c^2r}\dot{r}^2 - \frac{G(2M-\mu)h^2}{c^2r^3} + \frac{G^2M(2M-3\mu)}{2c^2r^2} \\
& - \frac{7G\mu h^4}{8c^4r^5} + \frac{G^2M^2\langle 17, -6, 6\rangle h^2}{4c^4r^4} + \frac{G^3M^3\langle -3, 5, -8\rangle}{4c^4r^3} \\
& + \frac{\langle 4, -27, 48\rangle}{8c^4}\dot{r}^6 + \frac{\langle 2, -15, 30\rangle h^2}{4c^4r^2}\dot{r}^4 + \frac{\langle 0, -3, 12\rangle h^4}{8c^4r^4}\dot{r}^2 \\
& + \frac{GM\langle 24, -17, -99\rangle}{8c^4r}\dot{r}^4 + \frac{GM\langle 0, 4, -8\rangle h^2}{c^4r^3}\dot{r}^2 + \frac{G^2M^2\langle 3, 10, 32\rangle}{4c^4r^2}\dot{r}^2 \\
& - \frac{M-3\mu}{2c^2M}\left[\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right)\right. \\
& \times\left\{\frac{M-3\mu}{2c^2M}\dot{r}^4 + \frac{(M-3\mu)h^2}{2c^2Mr^2}\dot{r}^2\right. \\
& \left.\left. + \frac{G(2M+5\mu)}{2c^2r}\dot{r}^2 - \frac{G(2M-\mu)h^2}{c^2r^3} + \frac{G^2M(2M-3\mu)}{2c^2r^2}\right\}\right] \\
& + \frac{\langle 1, -5, 5\rangle}{2c^4}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}\right)^3
\end{aligned}
\tag{7-26}
$$

となる．軌道 $r = r(\varphi)$ に対する微分方程式を得るために，方程式 (7-26) においてパラメータ t を消去しよう．

(7-23) と (7-24) から $\dot{r}$ は次のように表わされる．

$$
\begin{aligned}
\dot{r} = {} & \frac{dr}{d\varphi}\frac{h}{r^2}\left\{1 - \frac{(M-3\mu)h^2}{2c^2Mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{(M-3\mu)h^2}{2c^2Mr^2} - \frac{G(3M+\mu)}{c^2r}\right. \\
& + \frac{\langle 3, -15, 15\rangle h^4}{8c^4r^8}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^4 + \frac{\langle 3, -15, 15\rangle h^4}{4c^4r^6}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \\
& + \frac{GM\langle 5, -22, 2\rangle h^2}{2c^4r^5}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\langle 3, -15, 15\rangle h^4}{8c^4r^4} + \frac{G^2M^2\langle 5, 8, 0\rangle}{c^4r^2} \\
& \left. + \frac{GM\langle 5, -20, -3\rangle h^2}{2c^4r^3}\right\}.
\end{aligned}
\tag{7-27}
$$

(7-27) を (7-26) に代入すると $r(\varphi)$ に対する微分方程式が得られるが，さらに変数を $u=1/r$ に変換すると次式になる．

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{h^2}u-\frac{2E}{h^2}-\frac{G(4M-3\mu)}{c^2}u\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2-\frac{2G(2M-\mu)}{c^2}u^3\\
&+\frac{G^2M(2M-3\mu)}{c^2h^2}u^2+\frac{GM\langle 0,-5,5\rangle h^2}{4c^4}u\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^4\\
&+\frac{GM\langle 0,-3,-1\rangle h^2}{c^4}u^3\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+\frac{G^2M^2\langle 17,-14,14\rangle}{2c^4}u^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\\
&-\frac{7G\mu h^2}{4c^4}u^5+\frac{G^2M^2\langle 17,-6,6\rangle}{2c^4}u^4+\frac{G^3M^3\langle -3,5,-8\rangle}{2c^4h^2}u^3\\
&-\frac{(M-3\mu)h^2}{4c^2M}\left[\left\{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{h^2}u\right\}^2+2\left\{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{h^2}u\right\}\right.\\
&\qquad\left.\times\left\{-\frac{G(4M-3\mu)}{c^2}u\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2-\frac{2G(2M-\mu)}{c^2}u^3+\frac{G^2M(2M-3\mu)}{c^2h^2}u^2\right\}\right]\\
&+\frac{\langle 1,-5,5\rangle h^4}{8c^4}\left\{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{h^2}u\right\}^3=0.
\end{aligned}
\tag{7-28}
$$

この方程式は pN 近似での試験体の方程式 (4-36) を 2 体系に拡張し，ppN まで近似を上げたものである．

方程式 (7-28) を直接解くには，(7-28) から $du/d\varphi$ を求め積分を実行すればよい． (7-28) は $(du/d\varphi)^2$ について 3 次の代数方程式であるが c^{-1} の展開で c^{-4} 次までの解を求めると

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2&=F(u)\\
&=-\frac{9G\mu^2h^2}{4c^4M}u^5+\frac{G^2M^2\langle 0,1,8\rangle}{c^4}u^4\\
&\quad+\left\{\frac{G\mu}{c^2}+\frac{GM\langle 0,1,7\rangle E}{c^4}+\frac{G^3M^3\langle 17,-27,-12\rangle}{2c^4h^2}\right\}u^3\\
&\quad+\left\{-1+\frac{3G^2M(2M-\mu)}{c^2h^2}+\frac{G^2M^2\langle 15,-24,-6\rangle E}{c^4h^2}\right\}u^2\\
&\quad+\left\{\frac{2GM}{h^2}+\frac{2G(4M-3\mu)E}{c^2h^2}+\frac{GM\langle 4,-10,4\rangle E^2}{c^4h^2}\right\}u
\end{aligned}
$$

$$+\frac{2E}{h^2}\left\{1+\frac{(M-3\mu)E}{2c^2M}+\frac{\langle 0,-1,4\rangle E^2}{2c^4}\right\} \tag{7-29}$$

となり，軌道は

$$\varphi=\pm\int\frac{du}{\sqrt{F(u)}} \tag{7-30}$$

で与えられる．$F(u)$ は u の5次式なのでこの積分は超楕円積分（hyperelliptic integral）である．この積分を直接実行するのはむずかしいだけではなく，軌道関数を求めるのに見通しの良い方法ではない．（pN 近似では（7-30）の積分は適当な変数変換により，第1種および第3種の楕円積分で表わされる．）

そこで元の方程式（7-28）にもどり，逐次近似で解くことを試みよう[3]．$u(\varphi)$ を c^{-1} で展開し

$$u(\varphi)=u^{(0)}+u^{(2)}+u^{(4)}+\cdots \tag{7-31}$$

とおく．ここで右上の括弧内の数は c^{-1} の次数を表わす．（7-31）を（7-28）に代入し，c^{-1} の各次数ごとの方程式を導くと

$$\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^2+(u^{(0)})^2-\frac{2GM}{h^2}u^{(0)}-\frac{2E}{h^2}=0 \tag{7-32}$$

$$\begin{aligned}
&2\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\frac{du^{(2)}}{d\varphi}+2u^{(0)}u^{(2)}-\frac{2GM}{h^2}u^{(2)}-\frac{G(4M-3\mu)}{c^2}u^{(0)}\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^2\\
&-\frac{2G(2M-\mu)}{c^2}(u^{(0)})^3+\frac{G^2M(2M-3\mu)}{c^2h^2}(u^{(0)})^2\\
&-\frac{(M-3\mu)h^2}{4c^2M}\left\{\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^2+(u^{(0)})^2-\frac{2GM}{h^2}u^{(0)}\right\}^2=0
\end{aligned} \tag{7-33}$$

$$\begin{aligned}
&2\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\frac{du^{(4)}}{d\varphi}+2\left(u^{(0)}-\frac{GM}{h^2}\right)u^{(4)}+\left\{\frac{du^{(2)}}{d\varphi}-\frac{2G(4M-3\mu)}{c^2}u^{(0)}\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right\}\frac{du^{(2)}}{d\varphi}\\
&+\left\{u^{(2)}-\frac{G(4M-3\mu)}{c^2}\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^2-\frac{6G(2M-\mu)}{c^2}(u^{(0)})^2\right.\\
&\left.+\frac{2G^2M(2M-3\mu)}{c^2h^2}u^{(0)}\right\}u^{(2)}+\frac{GM\langle 0,-5,5\rangle h^2}{4c^4}u^{(0)}\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^4\\
&+\frac{GM\langle 0,-3,-1\rangle h^2}{c^4}(u^{(0)})^3\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^2+\frac{G^2M^2\langle 17,-14,14\rangle}{2c^4}(u^{(0)})^2\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^2
\end{aligned}$$

$$-\frac{7G\mu h^2}{4c^4}(u^{(0)})^5+\frac{G^2M^2\langle 17,-6,6\rangle}{2c^4}(u^{(0)})^4+\frac{G^3M^3\langle -3,5,-8\rangle}{2c^4h^2}(u^{(0)})^3$$

$$+\frac{\langle 0,1,-4\rangle h^4}{8c^4}\left\{\left(\frac{du^{(0)}}{d\varphi}\right)^2+(u^{(0)})^2-\frac{2GM}{h^2}u^{(0)}\right\}^3=0 \qquad (7\text{-}34)$$

となる．

(7-32)～(7-34) を解くにあたって，初期条件として

$$t=0 \text{ で } \quad \varphi=0 \quad \text{および} \quad \frac{du}{d\varphi}=0 \qquad (7\text{-}35)$$

を採用する．これは時刻 $t=0$ で r が極値をとることを意味する．

方程式 (7-32) は Newton 近似での方程式で，解は **Kepler 軌道**

$$u^{(0)}(\varphi)=\frac{GM}{h^2}(1+\varepsilon\cos\varphi) \qquad (7\text{-}36)$$

で与えられる．ここで ε は**離心率**

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2}} \qquad (7\text{-}37)$$

である．(7-36) を (7-33) に代入すると

$$-\sin\varphi\cdot\frac{du^{(2)}}{d\varphi}+\cos\varphi\cdot u^{(2)}-\frac{G^3M^2}{8c^2h^4\varepsilon}[\{(9M+\mu)+(14M-6\mu)\varepsilon^2$$

$$+(M-3\mu)\varepsilon^4\}+4\{8M\varepsilon+(4M-3\mu)\varepsilon^3\}\cos\varphi+24M\varepsilon^2\cos^2\varphi$$

$$+4\mu\varepsilon^3\cos^3\varphi]=0 \qquad (7\text{-}38)$$

となる．この方程式は $u^{(2)}(\varphi)=g^{(2)}(\varphi)\sin\varphi$ とおき $g^{(2)}(\varphi)$ に対する微分方程式を導くことにより容易に解かれる．初期条件 (7-35) を満たす解は

$$u^{(2)}(\varphi)=\frac{G^3M^2}{8c^2h^4\varepsilon}[8\{4M\varepsilon+(2M-\mu)\varepsilon^3\}+\{(9M+\mu)+(38M-6\mu)\varepsilon^2$$

$$+(M-3\mu)\varepsilon^4\}\cos\varphi+4\mu\varepsilon^3\sin^2\varphi+24M\varepsilon^2\varphi\sin\varphi] \qquad (7\text{-}39)$$

である．

同様に，(7-36) と (7-39) を (7-34) に代入して整理すると

$$-\sin\varphi\cdot\frac{du^{(4)}}{d\varphi}+\cos\varphi\cdot u^{(4)}+A_0+A_1\cos\varphi+A_2\sin^2\varphi+A_3\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$+A_4\sin^2\varphi\cos^2\varphi+A_5\sin^4\varphi\cos\varphi+B_1(-2\varphi\sin\varphi\cos\varphi+\varphi^2)+B_2\varphi\sin^3\varphi=0 \tag{7-40}$$

となる．ここで

$$A_0=-\frac{G^5M^5}{8c^4h^6\varepsilon^3}\{8\langle 53,-23,1\rangle+2\langle 413,-205,14\rangle(\varepsilon^2-1)$$
$$+\langle 448,-277,33\rangle(\varepsilon^2-1)^2+\frac{1}{2}\langle 102,-100,29\rangle(\varepsilon^2-1)^3$$
$$-\frac{1}{16}\langle 1,2,-23\rangle(\varepsilon^2-1)^4\} \tag{7-41}$$

$$A_1=-\frac{G^5M^5}{8c^4h^6\varepsilon^2}\{8\langle 53,-23,1\rangle+2\langle 307,-159,12\rangle(\varepsilon^2-1)$$
$$+\langle 194,-141,22\rangle(\varepsilon^2-1)^2+\langle 4,-7,6\rangle(\varepsilon^2-1)^3\} \tag{7-42}$$

$$A_2=\frac{G^5M^5}{8c^4h^6\varepsilon}\{2\langle 141,-43,4\rangle+16\langle 18,-7,1\rangle(\varepsilon^2-1)$$
$$+\langle 33,-23,8\rangle(\varepsilon^2-1)^2\} \tag{7-43}$$

$$A_3=\frac{G^5M^5}{8c^4h^6}\{\langle 34,10,-12\rangle+\langle 34,4,-20\rangle(\varepsilon^2-1)+\langle 0,3,-7)(\varepsilon^2-1)^2\} \tag{7-44}$$

$$A_4=\frac{G^5M^5\varepsilon^3}{2c^4h^6}\langle 0,1,-4\rangle \tag{7-45}$$

$$A_5=\frac{G^5M^5\varepsilon^4}{8c^4h^6}\langle 0,0,9\rangle \tag{7-46}$$

$$B_1=\frac{9G^5M^5\varepsilon}{2c^4h^6} \tag{7-47}$$

$$B_2=\frac{3G^5\mu M^4\varepsilon^2}{c^4h^6} \tag{7-48}$$

である．方程式（7-40）は方程式（7-38）に適用したのと同じ方法で解くことができ，解は

$$u^{(4)}(\varphi)=-A_1-A_0\cos\varphi+(A_3+B_2)\sin^2\varphi+\frac{1}{2}A_4\sin^2\varphi\cos\varphi+\frac{1}{3}A_5\sin^4\varphi$$

$$+\left(A_2+\frac{1}{2}A_4\right)\varphi\sin\varphi-B_2\varphi\sin\varphi\cos\varphi-B_1\varphi^2\cos\varphi \tag{7-49}$$

となる．

以上より ppN 近似における軌道関数（初期条件（7-35）を満たす）は

$$\frac{1}{r}=u(\varphi)$$

$$=\left[\frac{GM}{h^2}+\frac{G^3M^2}{c^2h^4}\{4M+(2M-\mu)\varepsilon^2\}-A_1\right]$$

$$+\left[\frac{GM\varepsilon}{h^2}+\frac{G^3M^2}{8c^2h^4\varepsilon}\{(9M+\mu)+(38M-6\mu)\varepsilon^2+(M-3\mu)\varepsilon^4\}-A_0\right]\cos\varphi$$

$$+\left(\frac{G^3\mu M^2\varepsilon^2}{2c^2h^4}+A_3+B_2\right)\sin^2\varphi+\frac{1}{2}A_4\sin^2\varphi\cos\varphi+\frac{1}{3}A_5\sin^4\varphi$$

$$+\left(\frac{3G^3M^3\varepsilon}{c^2h^4}+A_2+\frac{1}{2}A_4\right)\varphi\sin\varphi-B_2\varphi\sin\varphi\cos\varphi-B_1\varphi^2\cos\varphi \tag{7-50}$$

である．われわれにとって興味があるのは高次重力相互作用による楕円軌道からのずれなので $E<0$，すなわち $\varepsilon<1$ である．

Kepler 軌道（7-36）と初期条件（7-35）とから，$\varphi=0$ は動径 r の最小の**転回点**（近星点に対応する）であることがわかる．すなわち

$$\frac{1}{r_{\min}}=u_{\max}=u(\varphi=0)$$

$$=\frac{GM(1+\varepsilon)}{h^2}+\frac{G^3M^2}{c^2h^4}\left[\{4M+(2M-\mu)\varepsilon^2\}+\frac{1}{8\varepsilon}\{(9M+\mu)\right.$$

$$\left.+(38M-6\mu)\varepsilon^2+(M-3\mu)\varepsilon^4\}\right]-(A_0+A_1). \tag{7-51}$$

最大の転回点に対応する方位角の値 φ_1 は高次重力効果のために Newton 近似の値 π からずれるが，それは条件

$$\left.\frac{du}{d\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_1}=0 \tag{7-52}$$

によって決定される．

$$\varphi_1=\pi+\lambda^{(2)}+\lambda^{(4)}+O(c^{-6}) \tag{7-53}$$

と置き（7-52）に代入し，$\lambda^{(2)}$ と $\lambda^{(4)}$ に対する方程式を導き，それを解くことによ

って ppN 近似での φ_1 の値が定まる．結果は

$$\varphi_1 = \pi\left[1+\frac{3G^2M^2}{c^2h^2}+\frac{G^4M^3}{4c^4h^2}\{(90M-24\mu)+(15M-6\mu)\varepsilon^2\}\right] \tag{7-54}$$

となる．したがって動径 r の最大の転回点の値は

$$\frac{1}{r_{\max}} = u_{\min} = u(\varphi=\varphi_1)$$

$$= \frac{GM(1-\varepsilon)}{h^2}+\frac{G^3M^2}{c^2h^4}\left[\{4M+(2M-\mu)\varepsilon^2\}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8\varepsilon}\{(9M+\mu)+(38M-6\mu)\varepsilon^2+(M-3\mu)\varepsilon^4\}\right]+A_0-A_1 \tag{7-55}$$

となる．(7-51) と (7-55) で与えられる $u_{\max}$ と $u_{\min}$ は (7-29) の $F(u)$ に対して，$F(u)=0$ の解となっていることが確かめられる．

さて，2 体系の相対運動における 1 公転あたりの近星点移動 δ は重要な観測量であり，その値は ppN 近似で

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{2\varphi_1-2\pi}{2\pi}$$

$$= \frac{3G^2M^2}{c^2h^2}+\frac{G^4M^3}{4c^4h^4}\{(90M-24\mu)+(15M-6\mu)\varepsilon^2\} \tag{7-56}$$

である[4]．$\mu/M\to 0$ の極限をとると，試験体の場合の結果が得られる：

$$\left(\frac{\delta}{2\pi}\right)_{\text{試験体}} = \frac{3G^2M^2}{c^2h^2}+\frac{15G^4M^4}{4c^4h^4}(6+\varepsilon^2) \tag{7-57}$$

この場合，M は重力場の源の質量である．(7-57) の値は Schwarzschild 空間内での試験体の運動を ppN 近似で解いて得られる値と一致する．

もう 1 つの重要な観測量として軌道周期 P がある．軌道関数 (7-50) を用いて (7-27) より $\dot{\varphi} = \dot{r}/(dr/d\varphi)$ を計算すると

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{f(\varphi)} \quad , \tag{7-58}$$

$$f(\varphi) = \frac{h^3}{G^2M^2}\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\left(1+\frac{G^2M}{2c^2h^2}\Xi-\frac{2\widetilde{u}^{(2)}}{1+\varepsilon\cos\varphi}+\frac{G^4M^4}{8c^4h^4}\Lambda\right.$$

$$\left.-\frac{G^2M}{c^2h^2}\frac{\widetilde{u}^{(2)}}{1+\varepsilon\cos\varphi}\Xi+\frac{3(\widetilde{u}^{(2)})^2}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}-\frac{2\widetilde{u}^{(4)}}{1+\varepsilon\cos\varphi}\right) \tag{7-59 a}$$

$$\Xi = (M-3\mu)(\varepsilon^2-1)+(8M-4\mu)(1+\varepsilon\cos\varphi) \tag{7-59 b}$$

$$\widetilde{u^{(2)}} = \frac{G^2M}{8c^2h^2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\{(-9M-\mu)+(-6M+2\mu)\varepsilon^2+(15M-\mu)\varepsilon^4\}\right.$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\{(9M+\mu)+(38M+2\mu)\varepsilon^2+(M-3\mu)\varepsilon^4\}(1+\varepsilon\cos\varphi)$$

$$\left.-4\mu(1+\varepsilon\cos\varphi)^2+24M\varepsilon\varphi\sin\varphi\right] \tag{7-59 c}$$

$$\Lambda = \langle 2,-12,18\rangle(\varepsilon^2-1)^2+\frac{1}{\varepsilon^2}\{\langle -36,14,2\rangle+\langle -26,29,-10\rangle\varepsilon^2$$

$$+\langle 64,-52,14\rangle\varepsilon^4+\langle -2,9,-6\rangle\varepsilon^6+\left[\langle 32,-112,48\rangle(\varepsilon^2-1)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^2}\{\langle 36,-14,-2\rangle+\langle 168,-156,28\rangle\varepsilon^2+\langle -12,74,-26\rangle\varepsilon^4\}\right]$$

$$\times(1+\varepsilon\cos\varphi)+\langle 60,-56,0\rangle(1+\varepsilon\cos\varphi)^2$$

$$+\langle 0,-4,8\rangle(1+\varepsilon\cos\varphi)^3+\langle 96,-48,0\rangle\varepsilon\varphi\sin\varphi \tag{7-59 d}$$

$$\widetilde{u^{(4)}} = -\frac{G^4M^4}{16c^4h^4}\left[\frac{1}{\varepsilon^4}\{\langle -10,-2,-3\rangle+\langle 166,6,13\rangle\varepsilon^2\right.$$

$$+\langle 178,-118,-21\rangle\varepsilon^4+\langle -326,106,15\rangle\varepsilon^6+\langle -8,8,-4\rangle\varepsilon^8$$

$$-\frac{1}{8}\langle 1,2,-23\rangle(\varepsilon^2-1)^4\}+\frac{1}{\varepsilon^4}\{\langle 10,2,3\rangle+\langle -166,-24,-15\rangle\varepsilon^2$$

$$+\langle -726,178,21\rangle\varepsilon^4+\langle -102,84,-9\rangle\varepsilon^6$$

$$+\frac{1}{8}\langle 1,2,-23\rangle(\varepsilon^2-1)^4\}(1+\varepsilon\cos\varphi)$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\{\langle 0,18,2\rangle+\langle 68,32,0\rangle\varepsilon^2+\langle 0,6,-2\rangle\varepsilon^4\}(1+\varepsilon\cos\varphi)^2$$

$$+\langle 0,4,8\rangle(1+\varepsilon\cos\varphi)^3+\langle 0,0,-6\rangle(1+\varepsilon\cos\varphi)^4$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\{\langle -54,-6,0\rangle+\langle -444,84,0\rangle\varepsilon^2+\langle -66,42,0\rangle\varepsilon^4\}\varepsilon\varphi\sin\varphi$$

$$+\langle 0,48,0\rangle\varepsilon\varphi\sin\varphi(1+\varepsilon\cos\varphi)+\langle 72,0,0\rangle\varphi^2(1+\varepsilon\cos\varphi)$$

$$-\langle 72,0,0\rangle\varphi^2 \qquad (7\text{-}59\,\mathrm{e})$$

を得る．軌道周期Pは

$$\frac{P}{2}=\int_0^{P/2}dt=\int_0^{\varphi_1}f(\varphi)d\varphi \qquad (7\text{-}60)$$

によって与えられる．積分を実行すると，ppN 近似において

$$P=\frac{2\pi h^3}{G^2M^2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\left[1+\frac{G^2M(15M-\mu)}{8c^2h^2}(1-\varepsilon^2)\right.$$

$$+\frac{G^4M^2}{8c^4h^4}\left\{(60M^2-24\mu M)(1-\varepsilon^2)^{3/2}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{16}(105M^2+90\mu M+9\mu^2)(1-\varepsilon^2)^2\right\}\right] \qquad (7\text{-}61)$$

となる．

最後に，軌道関数（7-50）は次のようにコンパクトな形にまとめられる．

$$\frac{1}{r}=\frac{GM}{h^2}\{1+\varepsilon\cos(\eta\varphi)\}+\frac{G^3\mu M^2\varepsilon^2}{2c^2h^4}\sin^2(\eta\varphi)$$

$$+\left[\frac{G^3M^2}{c^2h^4}\{4M+(2M-\mu)\varepsilon^2\}-A_1\right]$$

$$+\left[\frac{G^3M^2}{8c^2h^4\varepsilon}\{(9M+\mu)+(38M-6\mu)\varepsilon^2+(M-3\mu)\varepsilon^4\}-A_0\right]\cos\varphi$$

$$+(A_3+B_2)\sin^2\varphi+\frac{1}{2}A_4\sin^2\varphi\cos\varphi+\frac{1}{3}A_5\sin^4\varphi \qquad (7\text{-}62)$$

ここで

$$\eta=1-\frac{3G^2M^2}{c^2h^2}-\frac{G^4M^3}{8c^4h^4\varepsilon^2}\{(27M+3\mu)+(222M-66\mu)\varepsilon^2+(33M-21\mu)\varepsilon^4\} \tag{7-63}$$

である．

§7-3 座標条件と観測量

一般相対論は任意の座標変換に対する共変性にその基礎を置いている．そして，事象の世界点を表わす変数 x^μ の値は座標系の選び方に対応して任意の値を取りうるものである．したがって，われわれの観測・測定する物理量（以後，**観測量**と呼ぶ）として意味があるのは，座標系の選び方によらない量，すなわち一般座標変換に対するスカラー量であることがわかる*)．一般論としてはこれでよいが，個々の具体的現象において何が観測量であるかは問題を解いて調べなければわからない．

さて，連星パルサー 1913+16 のような十分遠方にある系を地球上で観測するとき，われわれはまさに第 5 章で議論した**物理的に容認される座標系**，すなわち物体から十分遠方では平坦時空に近づく座標系で観測しているとみなされる．このような枠組内では，pN 近似において座標系の選択の任意性は 1 つのパラメータ y で表わされ，物体系の運動を記述する Lagrange 関数および Hamilton 関数には y 依存項が生じる．

はじめに，pN 近似の 2 体系の運動について観測量と座標条件の関係を調べることにする．後に第 8 章で論ずるが，素粒子論の立場では，パラメータ y は重力子の伝播関数に現われるゲージパラメータであり，ここで議論する問題は重力の場の理論における観測量のゲージ不変性の問題となる．

パラメータ y に依存する 2 体系の Lagrange 関数と Hamilton 関数は，(5-147) および (5-148) で与えられている．この場合の C.I. 座標は y に無関係で

---

*) ただし，ベクトル量やテンソル量の特定の成分も観測量になりうることに注意しなければならない．われわれの観測手段を考えると，たとえばあるベクトル量の成分を測定する際にはあらかじめ観測装置によってその軸が特定されており，ベクトル量の成分はこの軸への射影として定義される不変量である．

$$\boldsymbol{R}=\frac{\left(m_1c^2+\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1{}^2-\frac{Gm_1m_2}{2r}\right)\boldsymbol{z}_1+\left(m_2c^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2{}^2-\frac{Gm_1m_2}{2r}\right)\boldsymbol{z}_2}{m_1c^2+m_2c^2+\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1{}^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2{}^2-\frac{Gm_1m_2}{r}} \quad (7\text{-}64).$$

であり，相互作用エネルギー $-Gm_1m_2/r$ が物体1と2にちょうど1/2ずつ分配されている．この結果は§7-1で行ったのと同じ計算を y に依存する $h^{(n)}_{\mu\nu}$ $(n\leqq 2)$ を用いて実行するか，あるいは (5-147) から導かれる y に依存する運動方程式を直接変形して得られる．したがって，$\boldsymbol{V}=d\boldsymbol{R}/dt=0$ で定められるC.I.座標系におけるHamilton関数は静止エネルギー Mc^2 を除いて

$$H=\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{p}^2-\frac{M-3\mu}{8c^2\mu^3M}(\boldsymbol{p}^2)^2-\frac{G\mu M}{r}+(1+y)\frac{G^2\mu M^2}{2c^2r^2}$$
$$-\frac{G}{2c^2\mu r}[\{(3M+\mu)+yM\}\boldsymbol{p}^2+(\mu-yM)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})^2] \quad (7\text{-}65)$$

となる．

前節の計算と同様に，角運動量の方向を極軸にとり，単位質量あたりのエネルギーおよび角運動量の大きさをそれぞれ E，h とすると，Hamilton関数および正準方程式から以下の関係式が導かれる．

$$p_r=\mu\dot{r}\left\{1+\frac{M-3\mu}{2c^2M}\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)+\frac{G(3M+2\mu)}{c^2r}\right\} \quad (7\text{-}66)$$

$$\dot{\varphi}=\frac{h}{r^2}\left\{1-\frac{M-3\mu}{2c^2\mu^2M}\left(p_r{}^2+\frac{\mu^2h^2}{r^2}\right)-\frac{G(3M+\mu+yM)}{c^2r}\right\} \quad (7\text{-}67)$$

$$E=\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{h^2}{2r^2}-\frac{GM}{r}+\frac{M-3\mu}{2c^2M}\dot{r}^4+\frac{(M-3\mu)h^2}{2c^2Mr^2}\dot{r}^2$$
$$+\frac{G(2M+5\mu)}{2c^2r}\dot{r}^2-\frac{G(4M-2\mu+yM)h^2}{2c^2r^3}+\frac{G^2M(2M-3\mu+yM)}{2c^2r^2}$$
$$-\frac{M-3\mu}{2c^2M}\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{h^2}{2r^2}-\frac{GM}{r}\right)^2 \quad (7\text{-}68)$$

$$\dot{r}=\frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$$
$$=\frac{dr}{d\varphi}\frac{h}{r^2}\left\{1-\frac{(M-3\mu)h^2}{2c^2Mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^4-\frac{(M-3\mu)h^2}{2c^2Mr^2}-\frac{G(3M+\mu+yM)}{c^2r}\right\}.$$
$$(7\text{-}69)$$

(7-69) を用いて (7-68) を書き直し，変数を $u(\varphi)=1/r(\varphi)$ に変換すると方程式

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{h^2}u-\frac{2E}{h^2}-\frac{G(4M-3\mu+2yM)}{c^2}u\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

$$-\frac{G(4M-2\mu+yM)}{c^2}u^3+\frac{G^2M(2M-3\mu+yM)}{c^2h^2}u^2$$

$$-\frac{(M-3\mu)h^2}{4c^2M}\left\{\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{h^2}u\right\}^2=0 \tag{7-70}$$

を得る．

方程式 (7-70) は前節と同様に逐次解くことができ，結局軌道関数の解は

$$\frac{1}{r}=u(\varphi)$$

$$=\left[\frac{GM}{h^2}+\frac{G^3M^2}{2c^2h^4}\{(8+y)M+(4M-2\mu+yM)\varepsilon^2\}\right]$$

$$+\left[\frac{GM\varepsilon}{h^2}+\frac{G^3M^2}{8c^2h^4\varepsilon}\{(9M+\mu)+(38M-6\mu+8yM)\varepsilon^2\right.$$

$$\left.+(M-3\mu)\varepsilon^4\}\right]\cos\varphi+\frac{G^3M^2(\mu-yM)\varepsilon^2}{2c^2h^4}\sin^2\varphi$$

$$+\frac{3G^3M^3\varepsilon}{c^2h^4}\varphi\sin\varphi \tag{7-71}$$

となり明らかにパラメータ y に依存している．なお ε は Kepler 軌道の離心率 $(1+2Eh^2/G^2M^2)^{1/2}$ である．

動径 r の最小値は

$$\frac{1}{r_{\min}}=u_{\max}=u(\varphi=0)$$

$$=\frac{GM(1+\varepsilon)}{h^2}+\frac{G^3M^2}{2c^2h^4}\left[(8+y)M+(4M-2\mu+yM)\varepsilon^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\varepsilon}\{(9M+\mu)+(38M-6\mu+8yM)\varepsilon^2+(M-3\mu)\varepsilon^4\}\right] \tag{7-72}$$

となる．また r の最大値を与える φ の値 φ_1 は $du/d\varphi|_{\varphi=\varphi_1}=0$ から定まり

$$\varphi_1=\pi\left(1+\frac{3G^2M^2}{c^2h^2}\right) \tag{7-73}$$

となるので

$$\frac{1}{r_{\max}}=u_{\min}=u\,(\varphi=\varphi_1)$$

$$=\frac{GM(1-\varepsilon)}{h^2}+\frac{G^3M^2}{2c^2h^4}\Big[(8+y)M+(4M-2\mu+yM)\varepsilon^2-\frac{1}{4\varepsilon}\{(9M+\mu)$$

$$+(38M-6\mu+8yM)\varepsilon^2+(M-3\mu)\varepsilon^4\}\Big] \tag{7-74}$$

である．

(7-73) より1公転あたりの近星点移動δは

$$\frac{\delta}{2\pi}=\frac{2\varphi_1-2\pi}{2\pi}=\frac{3G^2M^2}{c^2h^2} \tag{7-75}$$

でyに無関係な値となる．さらに軌道周期Pを求めるために (7-69)，(7-71) を代入して $\dot{\varphi}=\dot{r}/(dr/d\varphi)=1/f(\varphi)$ を計算すると，$f(\varphi)$はパラメータ yを含まず，Pの値は前節で求めた (7-61) の pN 近似の値となる．

このように物理的に容認される最も一般的な Hamilton 関数で記述される pN 近似の2体系の運動を解くと，軌道関数 $r(\varphi)$，動径の最小値$r_{\min}$と最大値 $r_{\max}$ 等は座標系の任意性を表わすパラメータ yに明らかに依存するが，近星点移動δおよび軌道周期Pの値はyに無関係である．

次に，観測量と座標系との関係を調べるもう1つの例として，第4章で扱った太陽の周りの光の屈曲を ppN 近似で求めてみよう．そのためには質量Mの物体が原点に静止している場合の計量テンソルを $h^{(4)}_{\mu\nu}$ まで必要とするが，n体系の一般解 (5-61)～(5-66) から，それは

$$\begin{aligned}
&h^{(2)}_{00}=\frac{2GM}{c^2r},\quad h^{(2)}_{ij}=\frac{2GM}{c^2r}\delta_{ij}+y\frac{GM}{c^2r}(\delta_{ij}-n^in^j)\\
&h^{(3)}_{0i}=0,\quad h^{(4)}_{00}=-(2+y)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}\\
&h^{(4)}_{ij}=\frac{3G^2M^2}{2c^4r^2}\delta_{ij}+y\frac{G^2M^2}{c^4r^2}(2n^in^j-\delta_{ij})\\
&\qquad+y^2\frac{G^2M^2}{4c^4r^2}(\delta_{ij}-n^in^j)+\partial_j\widetilde{J}^{(4)}_i+\partial_i\widetilde{J}^{(4)}_j
\end{aligned} \tag{7-76}$$

で与えられることがわかる．ここで $\widetilde{J}_i^{(4)}$ は物理的要請(ｉ)〜(iv)と無限遠方での条件を満たす任意関数であるが，原点に静止している１個の源の場合には唯一の関数は

$$\widetilde{J}_i^{(4)}=\frac{\beta}{2}\cdot\frac{G^2M^2}{c^4r}n^i, \qquad (\beta\text{は任意パラメータ}) \tag{7-77}$$

である．したがって $h_{ij}^{(4)}$ は

$$h_{ij}^{(4)}=\frac{3G^2M^2}{2c^4r^2}\delta_{ij}+(\beta-y)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}(\delta_{ij}-2n^in^j)+y^2\frac{G^2M^2}{4c^4r^2}(\delta_{ij}-n^in^j) \tag{7-78}$$

となる．この結果，c^{-4} 次の近似で線素 ds は

$$\begin{aligned} ds^2=&-\left\{1-\frac{2GM}{c^2r}+(2+y)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}\right\}(dx^0)^2 \\ &+\left\{1+(2+y)\frac{GM}{c^2r}+\left(\frac{3}{2}-y+\beta+\frac{y^2}{4}\right)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}\right\}(d\boldsymbol{x})^2 \\ &-\left\{y\frac{GM}{c^2r}+\left(2\beta-2y+\frac{y^2}{4}\right)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}\right\}(\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{x})^2 \end{aligned} \tag{7-79}$$

あるいは球面極座標を用いて

$$\begin{aligned} ds^2=&-\left\{1-\frac{2GM}{c^2r}+(2+y)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}\right\}(dx^0)^2 \\ &+\left\{1+\frac{2GM}{c^2r}+\left(\frac{3}{2}+y-\beta\right)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}\right\}dr^2 \\ &+\left\{1+(2+y)\frac{GM}{c^2r}+\left(\frac{3}{2}-y+\beta+\frac{y^2}{4}\right)\frac{G^2M^2}{c^4r^2}\right\}r^2d\Omega^2 \end{aligned} \tag{7-80}$$

で与えられる．この一般的な表示は座標系の任意性を表わす２個のパラメータ y，β を含むが，通常よく使われる座標系との対応は次のようになっている：

$y=0$，$\beta=0$ ……… 等方(isotropic)座標

$y=-2$，$\beta=-\dfrac{9}{2}$ ……… Schwarzschild 座標

$y=0$，$\beta=-\dfrac{1}{2}$ ……… de Donder 座標．

光の場合，その世界線を記述するパラメータとして固有時 τ を使うことはできな

い．したがって測地線の方程式は座標変換に対して不変な任意のパラメータξを用いて

$$\frac{d^2x^\mu}{d\xi^2}+\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}(x)\frac{dx^\lambda}{d\xi}\frac{dx^\rho}{d\xi}=0 \tag{7-81}$$

で与えられる．光の経路がx-y平面内にあるとし，平面極座標を(r,φ)とする．光の軌道$r(\varphi)$に対する方程式は，条件式$ds=0$を利用して測地線の方程式（7-81）の空間成分からパラメータξを消去して導かれる．少し長い計算の後，結果は，ppN近似で

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}+\left\{-\frac{2}{r}+(2+\gamma)\frac{GM}{c^2r^2}+\left(-\frac{1}{2}-8\gamma+3\beta-\frac{\gamma^2}{2}\right)\frac{G^2M^2}{c^4r^3}\right\}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2$$
$$+\left\{-r+\left(2-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{GM}{c^2}+\left(-\frac{1}{2}+2\gamma-\beta\right)\frac{G^2M^2}{c^4r}\right\}=0 \tag{7-82}$$

である．変数を$u(\varphi)=1/r$に変えると

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+\left\{-(2+\gamma)\frac{GM}{c^2}+\left(\frac{1}{2}+8\gamma-3\beta+\frac{\gamma^2}{2}\right)\frac{G^2M^2}{c^4}u\right\}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$
$$+\left\{u+\left(-2+\frac{\gamma}{2}\right)\frac{GM}{c^2}u^2+\left(\frac{1}{2}-2\gamma+\beta\right)\frac{G^2M^2}{c^4}u^3\right\}=0 \tag{7-83}$$

となる．両辺に$du/d\varphi$を掛け，さらに（7-83）を使うとこの方程式は積分され

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2-(4+\gamma)\frac{GM}{c^2}u^3-(4+2\gamma)\frac{GM}{c^2}u\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$
$$+\left(\frac{17}{2}+8\gamma-\beta+\frac{3}{4}\gamma^2\right)\frac{G^2M^2}{c^4}u^4$$
$$+\left(\frac{17}{2}+16\gamma-3\beta+\frac{5}{2}\gamma^2\right)\frac{G^2M^2}{c^4}u^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2=A \tag{7-84}$$

を得る．ここでAは積分定数である．

§7-2においてppN近似の軌道関数を求めたのと同様に$u(\varphi)=u^{(0)}+u^{(2)}+u^{(4)}+\cdots$と$c^{-1}$で展開し，逐次解を求めると積分定数$A$が正の場合のみ解が存在することがわかる．$A=1/b^2$とおき，条件$\left.\frac{du}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}=0$を課すと，解は

$$\frac{1}{r}=u=\frac{1}{b}\cos\varphi+\frac{GM}{2c^2b^2}(4+\gamma\cos^2\varphi)+\frac{G^2M^2}{4c^4b^3}\{(23+4\gamma+2\beta+\gamma^2)\cos\varphi$$

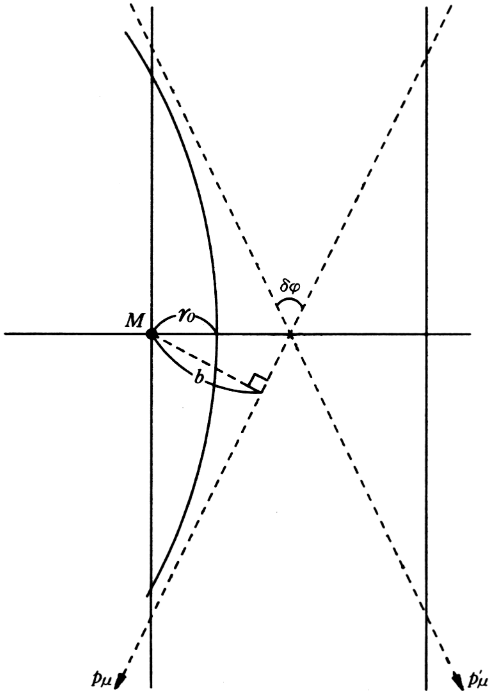


図 7-1

$$+(4y-2\beta-y^2)\sin^2\varphi\cos\varphi+15\varphi\sin\varphi\} \tag{7-85}$$

となる．これが ppN 近似における光の軌道である．この軌道の漸近線を求めることにより，積分定数 b は衝突径数（impact parameter）であることがわかる．

次に $r\to\infty$，すなわち $u=0$ を与える角度 $\varphi_+=\pi/2+\lambda_+$ および $\varphi_-=-(\pi/2+\lambda_-)$ を c^{-4} 次まで求めると

$$\varphi_+=-\varphi_-=\frac{\pi}{2}+\frac{2GM}{c^2b}+\frac{15\pi G^2M^2}{8c^4b^2} \tag{7-86}$$

となり，無限遠方から来て源の近くを通り再び無限遠方に去る光の屈曲角 $\delta\varphi$ は ppN 近似で

$$\delta\varphi=(\varphi_+-\varphi_-)-\pi=\frac{4GM}{c^2b}+\frac{15\pi G^2M^2}{4c^4b^2} \tag{7-87}$$

となる．この角度は座標系の選び方の任意性を表わすパラメータ y，β に無関係で

ある．

ところで，光が源に最も近づく距離 r_0 を求めると（7-85）より

$$\frac{1}{r_0}=\frac{1}{b}+\left(2+\frac{y}{2}\right)\frac{GM}{c^2b^2}+\frac{1}{4}(23+4y+2\beta+y^2)\frac{G^2M^2}{c^4b^3} \qquad (7\text{-}88)$$

となり，この値は座標系の選び方に依存する．このことは 2 体系の運動で $r_{\rm min}$，$r_{\rm max}$ が y に依存したことに対応している．

ここで一般相対論における観測量の議論に関して注意しなければならないことがある．1つの例として屈曲角 $\delta\varphi$ を最近接距離 r_0 を使って表現しよう．(7-87) と (7-88) から

$$\delta\varphi=\frac{4GM}{c^2r_0}+\left(\frac{15\pi}{4}-8-2y\right)\frac{G^2M^2}{c^4{r_0}^2} \qquad (7\text{-}89)$$

を得る．これは見かけ上座標系の選択に依存するように見えるが，実際には r_0 自身も座標系の選択に依存しており，右辺は一定値となっているのである．したがって，ちょうど太陽の表面を通過して来る光の屈曲角を求めるのに，(7-89) の右辺に $r_0=R_\odot=6.96\times10^{10}\,{\rm cm}$ を代入してはならない．もしそうすると

$$\delta\varphi=\frac{4GM}{c^2R_\odot}+\left(\frac{15\pi}{4}-8-2y\right)\frac{G^2M^2}{c^4{R_\odot}^2}$$

となり，一般相対論の予言は ppN 近似では不確定である（y に依存する）という誤った結論に導かれる．屈曲角を評価する時には衝突径数 b を用いなければならない．

この節で考察した 2 つの例で，近星点移動，軌道周期そして屈曲角が座標系の選択によらないのは，これらの量を運動方程式の積分定数 E，h そして b で表現したときにパラメータ y，β を含まないことによっている．

ひとたび何が観測量であるかがわかれば，それを一般座標変換に対して不変な形式（スカラー量）に表現するのは比較的容易である．たとえば上述の屈曲角 $\delta\varphi$ は

$$\cos(\delta\varphi)=1+\frac{(p_\mu p'^\mu)}{(p_\nu v^\nu)(p'_\lambda v^\lambda)}$$

と表わされる．ここで，v^μ は平坦時空にいるとみなされる観測者の 4 元速度ベクトルであり，そして p_μ と p'_μ は，それぞれ，太陽がある場合とない場合とに遠方の星から来る光の世界線と観測者の世界線とが交わる点における光の接線ベクトルである．(図7-1 を参照)

この節のはじめに一般相対論における観測量はスカラー量であると述べたが，厳密な観測量の定義についてはまだはっきり解明されていないところがある．そもそも座標 x^μ はいわば時空点を識別するための番地付けであり，それ自体は物理的意味を有するものではないが，一般座標変換のもとでの物理量の変換には単に番地のつけ変えおよび座標時計の進みの変更に過ぎない部分と，重力場の影響を表わす部分とが含まれている．

この点に関連して "reference frame" という概念が導入されている．たとえば，Møller の導入した "reference frame" は 1 つの座標系において $x^i = \text{const}, (i=1, 2, 3)$ で定義される点の集合として定義される．そして座標変換のうち

$$x^i \longrightarrow x'^i = F^i(x^j),\quad x^0 \longrightarrow x'^0 = f(x^0,\ x^j)$$

は同一の "reference frame" を与えると考える．すなわち，この変換の第 1 のものは単に空間座標の番地のつけ方の変更であり，第 2 のものは時計の合わせ方と進み方を連続的に変えるに過ぎないからである．

この "reference frame" を基に，上記の変換に対して明白な変換性を持つ量として観測量を定義するという考え方がある．この立場から見ると，先の光の屈曲の議論に現われたパラメータ y，β は，まさに，変換 $x^i \longrightarrow x'^i = F^i(x^j)$ によって生じる $g_{\mu\nu}$ の任意性を表わしている．

§7-4　スピン-軌道およびスピン-スピン相互作用による歳差運動

この節では，2 体系の運動に対する重力的スピン-軌道およびスピン-スピン相互作用の効果を調べる．Newton 近似における Kepler 軌道を特徴づける物理量として，軌道面を定める角運動量 $\boldsymbol{L}$ と軌道面内での転回点（近星点）の方向を定める Laplace-Runge-Lenz ベクトル $\boldsymbol{A}$ とがある．C.I. 座標系においては

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{7-90}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L} - G\mu^2 M\frac{\boldsymbol{r}}{r},\qquad (\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A} = 0) \tag{7-91}$$

で定義され，Newton 近似では $\boldsymbol{A}$ も運動の恒量である．

§5-5 で求めたスピン-軌道およびスピン-スピン相互作用から，C.I. 系における 2 体系の全 Hamilton 関数は

$$H = H_{\mathrm{CI}} + H_{\mathrm{S\text{-}O}} + H_{\mathrm{S\text{-}S}}, \tag{7-92}$$

$$H_{\mathrm{S\text{-}O}} = \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}}{r^3},\quad \boldsymbol{S} = \frac{2G}{c^2}\left\{\left(1+\frac{3m_2}{4m_1}\right)\boldsymbol{s}_1+\left(1+\frac{3m_1}{4m_2}\right)\boldsymbol{s}_2\right\} \tag{7-93}$$

$$H_{\mathrm{S\text{-}S}} = \frac{G}{c^2 r^3}\{3(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2)\} \tag{7-94}$$

で与えられる．H_{CI} は（7-17）で与えられており，$H_{\mathrm{S\text{-}O}}$ および $H_{\mathrm{S\text{-}S}}$ は pN 近似である．

高次重力相互作用の効果を，ベクトル $\boldsymbol{L}$ および $\boldsymbol{A}$ の瞬間的（instantaneous）な Kepler 軌道の値からの変化として記述しよう．$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{A}$ の時間的変化は，正準運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \{\boldsymbol{L},\ H\} \tag{7-95}$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \{\boldsymbol{A},\ H\} \tag{7-96}$$

によって与えられる．ここで，{　，　} 記号は Poisson 括弧を表わしている．基本 Poisson 括弧

$$\{x^i,\ p_j\} = \delta^i{}_j,\quad \{x^i,\ x^j\} = \{p_i,\ p_j\} = 0 \tag{7-97}$$

から

$$\{L_i,\ L_j\} = \varepsilon_{ijk}L_k \tag{7-98 a}$$

$$\{A_i,\ L_j\} = \varepsilon_{ijk}A_k \tag{7-98 b}$$

$$\{A_i,\ A_j\} = \varepsilon_{ijk}L_k\left(-\boldsymbol{p}^2+\frac{2G\mu^2 M}{r}\right) \tag{7-98 c}$$

となり，またスピンに対しては

$$\{s_{ai},\ s_{bj}\} = \delta_{ab}\varepsilon_{ijk}s_{ak},\qquad (a,\ b=1,\ 2) \tag{7-99 a}$$

$$\{L_i,\ s_{aj}\} = \{A_i,\ s_{aj}\} = 0 \tag{7-99 b}$$

である．正準運動方程式（7-95），（7-96）の右辺の H 中の H_{CI} の効果は，既に § 7-2 で別の形で正確に解いているので，ここでは $H_{\mathrm{S\text{-}O}}$ および $H_{\mathrm{S\text{-}S}}$ の寄与を考える．上述の Poisson 括弧を用いて計算すると，次の結果が導かれる：

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{\mathrm{S\text{-}O}} = \{\boldsymbol{L},\ H_{\mathrm{S\text{-}O}}\}$$

$$= \frac{1}{r^3}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{L}) \tag{7-100}$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\text{S-O}} = \{\boldsymbol{A},\ H_{\text{S-O}}\}$$

$$= \frac{1}{r^3}(\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}) - \frac{3}{r^5}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L})(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{r}) \tag{7-101}$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{\text{S-S}} = \{\boldsymbol{L},\ H_{\text{S-S}}\}$$

$$= \frac{3G}{c^2 r^3}[(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{n})] \tag{7-102}$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\text{S-S}} = \{\boldsymbol{A},\ H_{\text{S-S}}\}$$

$$= \frac{3G}{c^2 r^3}\Bigg(\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{L}}{r^2}[5(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2)]$$

$$-\frac{1}{r}[(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{L})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{L})] + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})[\boldsymbol{s}_1(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n})$$

$$+(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{s}_2] - \boldsymbol{n}[(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{p})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{p})]\Bigg). \tag{7-103}$$

スピン-軌道相互作用による永年変化を求めるには，(7-101)，(7-102) を軌道周期Pにわたって時間平均すればよい．Newton 近似においては，$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{S}$は運動の恒量であるから，右辺の時間平均は Kepler 軌道に対する r^{-3}，$\boldsymbol{r}\cdot r^{-5}$ の時間平均となる．(7-58)，(7-61) によって，時間平均は角度φについての平均に置き換えられ，Newton 近似では

$$\langle F(\boldsymbol{r})\rangle_t = \frac{1}{P}\int_0^P F(\boldsymbol{r}(t))dt = (1-\varepsilon^2)^{3/2}\int_0^{2\pi}\frac{F(\boldsymbol{r}(\varphi))}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}\cdot\frac{d\varphi}{2\pi} \tag{7-104}$$

によって計算される．r^{-3}，$\boldsymbol{r}\cdot r^{-5}$ について積分を実行すると

$$\langle\frac{1}{r^3}\rangle_t = \frac{1}{a^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \tag{7-105 a}$$

$$\langle\frac{\boldsymbol{r}}{r^5}\rangle_t = \frac{\varepsilon}{a^4(1-\varepsilon^2)^{5/2}}\boldsymbol{e}_A \tag{7-105 b}$$

となる．ここで，aは軌道の長軸半径 $a = \dfrac{h^2}{GM}\cdot\dfrac{1}{1-\varepsilon^2}$ であり，$\boldsymbol{e}_A$ は近星点方向の単位ベクトル ($\boldsymbol{e}_A = \boldsymbol{A}\cdot(G\mu^2 M\varepsilon)^{-1}$) である．積分 (7-105 b) を計算する際に

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_A \cos\varphi + \boldsymbol{e}_L \times \boldsymbol{e}_A \sin\varphi, \quad \boldsymbol{e}_L = \boldsymbol{L}/L, \quad L = |\boldsymbol{L}| = [G\mu^2 Ma(1-\varepsilon^2)]^{1/2}$$

の関係を利用した．以上の結果から，$\boldsymbol{L}$ および $\boldsymbol{A}$ の永年変化は次式で与えられる：

$$\left\langle \left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{\mathrm{S-O}} \right\rangle_t = \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}} \times \boldsymbol{L} \tag{7-106}$$

$$\left\langle \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\mathrm{S-O}} \right\rangle_t = \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}} \times \boldsymbol{A}. \tag{7-107}$$

ここで，回転の速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}}$ は

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}} = \frac{1}{a^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\left[\boldsymbol{S} - \frac{3(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L})}{L^2}\boldsymbol{L}\right] \tag{7-108}$$

である．したがって，$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{A}$ は大きさを変えず歳差運動を行うことがわかる．スピン-軌道相互作用によって，ベクトル $\boldsymbol{A}$ が軌道面内で歳差運動を行うだけでなく，$\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{L}$ の方向が異なる場合には軌道面自体（$\boldsymbol{L}$）も空間内で歳差運動を行う．

一方，§7-2 で求めた H_{CI} によって生じる近星点移動も effective には軌道面内での $\boldsymbol{A}$ の歳差運動として記述され，その回転速度ベクトルは（7-56）の近星点移動 δ と（7-61）の軌道周期 P によって

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{\delta}{P}\boldsymbol{e}_L \tag{7-109}$$

と表わされる．したがって，$H_{\mathrm{CI}} + H_{\mathrm{S-O}}$ による全回転速度ベクトルは

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}} \tag{7-110}$$

となる．このことから，たとえば $\boldsymbol{S}$ が $\boldsymbol{L}$ に平行な場合には，H_{CI} による軌道面内の $\boldsymbol{A}$ の歳差運動（近星点移動）はスピン-軌道相互作用の効果によって減じることになる．

回転速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}}$ をスピン $\boldsymbol{s}_1$ および $\boldsymbol{s}_2$ の寄与に分けると

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}} = \boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2, \tag{7-111 a}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \frac{2G}{c^2 a^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\left(1 + \frac{3m_2}{4m_1}\right)[\boldsymbol{s}_1 - 3(\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{e}_L)\boldsymbol{e}_L] \tag{7-111 b}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_2 = \frac{2G}{c^2 a^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\left(1 + \frac{3m_1}{4m_2}\right)[\boldsymbol{s}_2 - 3(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{e}_L)\boldsymbol{e}_L] \tag{7-111 c}$$

となる．したがって，$\boldsymbol{s}_1 = 0$，$m_1 \ll m_2$ の場合には

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S-O}} = \boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{LT}} = \frac{2G}{c^2 a^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}}[\boldsymbol{s}_2 - 3(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{e}_L)\boldsymbol{e}_L] \tag{7-112}$$

となる．これは中心にある物体の自転($\boldsymbol{s}_2$)によって生じる重力場中での物体の軌道運動を特徴づける量で，この効果は最初 Thirring と Lense によって導かれた．

$H_{\mathrm{S-S}}$ の $\boldsymbol{L}$ および $\boldsymbol{A}$ に対する効果も，(7-102)，(7-103) を時間で平均することによって導かれるが，$H_{\mathrm{S-S}}$ に関しては物体のスピン $\boldsymbol{s}_1$ の歳差運動の方が物理現象として興味深い．$\boldsymbol{s}_1$ の時間的変化を正準方程式

$$\frac{d\boldsymbol{s}_1}{dt}=\{\boldsymbol{s}_1,\ H\} \tag{7-113}$$

によって計算すると

$$\frac{d\boldsymbol{s}_1}{dt}=\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S}}\times\boldsymbol{s}_1 \tag{7-114}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S}}=\frac{2G}{c^2}\left(1+\frac{3m_2}{4m_1}\right)\frac{\boldsymbol{L}}{r^3}+\frac{G}{c^2r^3}[3(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}_2] \tag{7-115}$$

となる．特に $m_1\ll m_2$ の場合には

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{S}}\underset{m_1\ll m_2}{=}\frac{3Gm_2}{2c^2r^2}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}+\frac{G}{c^2r^3}[3(\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}_2] \tag{7-116}$$

であり，この効果は，たとえば，地球の重力場中で軌道運動するジャイロスコープの歳差運動として観測される．

§7-5　加速度を含む Lagrange 関数の正準形式

第5章で調べたように，ppN 近似での多体系の Lagrange 関数は一般的には加速度に依存する．この依存性は座標変換と結びついているので，実際の問題を解くに当っては，Lagrange 関数が加速度に依存しないような座標条件を選ぶのが便利である．前節までは，そのような座標条件の1つである (5-146) のもとで物体の運動を論じた．

一方，高階微分を含む力学系の問題は，古くから知られている非局所場理論や遠隔作用の立場で記述される電気力学 (Wheeler-Feynman electrodynamics) に加えて，最近では，スカラー曲率の2乗項を含むように相対論を拡張する試みや，高次元の超対称性理論などにおいても現われる．そこで，本節では高階微分を含む Lagrange 関数の正準形式の具体例として，ppN 近似の2体系の Lagrange 関数

$$L(\alpha)=L(1,2)+L_1(\alpha) \tag{7-117}$$

を考える[5]．$L(1,2)$ は (5-158) で与えられており，$L_1(\alpha)$ は (5-139) より

$$L_1(\alpha) = \frac{G}{4c^4}\sum_{a=1}^{2} \boldsymbol{f}_a\cdot\left(m_a\boldsymbol{\alpha}_a + \varepsilon_a G\frac{m_1m_2}{r^2}\boldsymbol{n}\right) \tag{7-118}$$

である*)．ただし，

$$\boldsymbol{f}_a = \varepsilon_a\boldsymbol{n}\left(G\frac{m_1m_2}{r} - m_{a'}\boldsymbol{v}_{a'}{}^2\right) \tag{7-119}$$

で，$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$，$a'$ は“a でない”すなわち $1'=2$，$2'=1$ を表わす記号である．この Lagrange 関数の $\boldsymbol{\alpha}$ 依存性は，時間の全微分項を加えても消去できないことに注意する．

はじめに，理論の概略を一般的に述べておこう．力学変数の時間に関するN階微分を含む自由度 n の系に対する Lagrange 関数を

$$L(q^i,\ \dot{q}^i,\ \cdots,\ \overset{(N)}{q}{}^i) \tag{7-120}$$

とする**)．ここで，$i=1,\ \cdots,\ n$，$\overset{(s)}{q}{}^i = \dfrac{d^s}{dt^s}q^i$，$(s=1,\ \cdots,\ N)$である．拡張された意味での Hessian 行列

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \overset{(N)}{q}{}^i \partial \overset{(N)}{q}{}^j} \tag{7-121}$$

が一般的に正則でない場合$(\det A_{ij}=0)$を考え，その階数を $n-r$ とする．このような系の正準理論は Ostrogradski 変換と Dirac の方法によって整備される [6，7]．

Ostrogradski に従って $q^i_{(s)} = \overset{(s)}{q}{}^i$，$(s=0,\ \cdots,\ N-1$，$q^i_{(0)}=q^i)$に共役な正準運動量 $p_i^{(s)}$，

$$p_i^{(N-1)} = \frac{\partial L}{\partial \overset{(N)}{q}{}^i} \tag{7-122 a}$$

$$p_i^{(s-1)} = \frac{\partial L}{\partial \overset{(s)}{q}{}^i} - \dot{p}_i^{(s)},\quad (s=1,\ \cdots,\ N-1) \tag{7-122 b}$$

を導入し，“速度”位相空間(VPS)から位相空間(PS)に移行する：

$$(q^i,\ \dot{q}^i,\ \ddot{q}^i,\ \cdots,\ \overset{(2N-1)}{q}{}^i)$$
$$\longrightarrow (q^i_{(0)},\ q^i_{(1)},\ q^i_{(2)},\ \cdots,\ q^i_{(N-1)};\ p_i^{(0)},\ p_i^{(1)},\ p_i^{(2)},\ \cdots,\ p_i^{(N-1)}).$$

---

*)　本節では物体1，2についての和はΣ記号で表示される．添字 a が2重に現われてもΣ記号がなければ和ではない．

**)　L は t を陽に含まないとする．

そして，Hamilton 関数は

$$H=\sum_{s=0}^{N-1}p_i^{(s)}q_{(s+1)}^i-L(q,\ \cdots,\ \overset{(N)}{q}) \tag{7-123}$$

で定義される．A_{ij} が正則ではないので，(7−122a) を $\overset{(N)}{q}{}^i$ について解く際，$n-r$ 個のみ独立であり，他の r 個を消去すると，r 個の 1 次拘束条件式

$$\phi_a^0(q_{(0)},\ q_{(1)},\ \cdots,\ q_{(N-1)},\ p^{(N-1)})\approx 0,\ (\alpha=1,\ \cdots,\ r) \tag{7-124}$$

が生じる．この条件式は $p_i^{(N-1)}$ に依存するが $p_i^{(s)}\,(s<N-1)$ には依存しない．Dirac の方法によれば，拘束条件 $\phi_a^0\approx 0$ を伴う系の正準理論は次の形の全 Hamilton 関数 $H_{\rm T}$ で記述される：

$$H_{\rm T}=H_0+v^a\phi_a^0\ , \tag{7-125}$$

ここで，H_0 は正準 Hamilton 関数，v^a は未定乗数である．この H_0 および $H_{\rm T}$ を (7-123) の Hamilton 関数から定めよう．A_{ij} の階数が $n-r$ なので，一般性を失うことなく，(7-122 a) のうち $n-r$ 個の

$$p_a^{(N-1)}=\frac{\partial L}{\partial \overset{(N)}{q}{}^a},\ (a=1,\ \cdots,\ n-r) \tag{7-126}$$

が $\overset{(N)}{q}{}^a=\dot{q}^a_{(N-1)}$ について解けると仮定できる．その解を

$$\dot{q}^a_{(N-1)}=\overset{(N)}{q}{}^a=f^a(q^i_{(0)},\ q^i_{(1)},\ \cdots,\ q^i_{(N-1)},\ p_b^{(N-1)},\ \dot{q}^\alpha_{(N-1)}) \tag{7-127}$$
$$(b=1,\ \cdots,\ n-r\ ;\ \alpha=n-r+1,\ \cdots,\ n)$$

とおく．(7-127) を (7-123) に代入すると

$$H=p_a^{(N-1)}f^a+p_\alpha^{(N-1)}\dot{q}^\alpha_{(N-1)}+\sum_{s=0}^{N-2}p_i^{(s)}q^i_{(s+1)}-L\Big|_{\dot{q}^a_{(N-1)}=f^a} \tag{7-128}$$

となる．ここで $(\partial L/\partial\dot{q}^\alpha_{(N-1)})|_{\dot{q}^a_{(N-1)}=f^a}$ は $\dot{q}^\alpha_{(N-1)}$ に依存しないことが証明されるので，$\partial H/\partial\dot{q}^\alpha_{(N-1)}=p_\alpha^{(N-1)}-(\partial L/\partial\dot{q}^\alpha_{(N-1)})|_{\dot{q}^a_{(N-1)}=f^a}$ も $\dot{q}^\alpha_{(N-1)}$ に依存しない．したがって，H は $\dot{q}^\alpha_{(N-1)}$ の線形な関数であり，

$$\begin{aligned}H=&H_0(q^i_{(0)},\ \cdots,\ q^i_{(N-1)},\ p_i^{(0)},\ \cdots,\ p_i^{(N-2)},\ p_a^{(N-1)})\\&+\dot{q}^\alpha_{(N-1)}\phi_\alpha^0(q_{(0)},\ \cdots,\ q_{(N-1)},\ p^{(N-1)})\end{aligned} \tag{7-129}$$

と表わされる．ここで

$$H_0=H\,|_{\dot{q}^\alpha_{(N-1)}=0} \tag{7-130}$$

$$\phi_\alpha^0=p_\alpha^{(N-1)}-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha_{(N-1)}}\Bigg|_{\dot{q}^a_{(N-1)}=f^a} \tag{7-131}$$

である．ϕ_α^0 は $\dot{q}^a_{(N-1)}$ に依存せず，$\phi_\alpha^0\approx 0$ は 1 次拘束条件式 (7-124) となってい

る．また，全 Hamilton 関数は

$$H_{\mathrm{T}} = H\,\Big|_{\dot{q}^{a}_{(N-1)}=v^{a}} \tag{7-132}$$

で与えられる．

以上の準備から，系の正準運動方程式は次のようになる：

$$\dot{q}^{i}{}_{(s)} = \frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial p^{(s)}_{i}} \approx q^{i}{}_{(s+1)}, \qquad (s=0,\ \cdots,\ N-2) \tag{7-133 a}$$

$$\dot{q}^{(N-1)}_{a} = \frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial p^{(N-1)}_{a}} \approx f^{a}\,(q_{(0)},\ \cdots,\ q_{(N-1)},\ p^{N-1}_{b},\ v) \tag{7-133 b}$$

$$\dot{q}^{(N-1)}_{a} = \frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial p^{(N-1)}_{a}} \approx v^{a} \tag{7-133 c}$$

$$\dot{p}^{(0)}_{i} = -\frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial q^{i}_{(0)}} \approx \frac{\partial L}{\partial q^{i}_{(0)}} \tag{7-133 d}$$

$$\dot{p}^{(s)}_{i} = -\frac{\partial H_{\mathrm{T}}}{\partial q^{i}_{(s)}} \approx -p^{(s-1)}_{i} + \frac{\partial L}{\partial q^{i}_{(s)}},\ (s=1,\ \cdots,\ N-1). \tag{7-133 e}$$

ここで，≈記号は拘束条件 $\phi^{0}_{a} \approx 0$ を考慮して等式が成立することを示し，右辺の $q^{i}_{(s)}$ に対する L の微分は

$$\frac{\partial L}{\partial q^{i}_{(s)}} = \left\{\frac{\partial}{\partial q^{i}_{(s)}} L\,(q_{(0)},\ \cdots,\ q_{(N-1)},\ \dot{q}^{a}_{(N-1)},\ v^{a})\right\}\Bigg|_{\dot{q}^{a}_{(N-1)}=f^{a}},\ (s=0,\ \cdots,\ N-1)$$

を意味する．正準方程式（7-133 a～e）のうち，力学的（dynamical）方程式は（7-133 d）であり，他の方程式と拘束条件 $\phi^{0}_{a} \approx 0$ が Ostrogradski 変換(7-122 a)，(7-122 b)を表わしている．この正準方程式から，はじめの Lagrange 関数(7-120)に対する Euler-Lagrange 方程式

$$\sum_{s=0}^{N}(-1)^{s}\frac{d^{s}}{dt^{s}}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(s)}{q}{}^{i}}\right) = 0 \tag{7-134}$$

が導かれる．このようにして，高階微分を含む特異 Lagrange 関数の系に対する正準形式が整えられる．一般論としては，この後，1次拘束条件式の定常性の条件から導かれる2次拘束条件式，Dirac による拘束条件式の分類（第1類，第2類拘束条件）そして Poisson 括弧の修正（Dirac 括弧）による第2類拘束条件式の除去と展開されるが，それらは第1章の文献［2］にゆずり，必要な部分は具体的問題の中で説明することにしよう．

（7-117）で与えられる Lagrange 関数 $L(\alpha)$ の微分の階数は $N=2$ で，力学変

数は $z_a{}^i$，$v_a{}^i$，$\alpha_a{}^i\,(a=1,2\,;\,i=1,2,3)$ である．$L(\alpha)$ の加速度依存性は線形なので，拡張された Hessian 行列は

$$A_{(a,i)(b,j)} = \frac{\partial^2 L(\alpha)}{\partial \alpha_a{}^i \partial \alpha_b{}^j} = 0 \tag{7-135}$$

となり,階数は 0 ,したがって理論は 6 個の 1 次拘束条件式を伴う．Ostrogradski に従って，$\boldsymbol{z}_{a(1)} = \boldsymbol{v}_a$，$\boldsymbol{z}_{a(0)} = \boldsymbol{z}_a$ に共役な正準運動量 $\boldsymbol{p}_a{}^{(1)}$，$\boldsymbol{p}_a{}^{(0)}$ を導入する：

$$\boldsymbol{p}_a{}^{(1)} = \frac{\partial L(\alpha)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_a}$$

$$= \frac{G}{4c^4} m_a \boldsymbol{f}_a \tag{7-136}$$

$$\boldsymbol{p}_a{}^{(0)} = \frac{\partial L(\alpha)}{\partial \boldsymbol{v}_a} - \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_a{}^{(1)} = \frac{\partial L(1,2)}{\partial \boldsymbol{v}_a} + \frac{\partial L_1(\alpha)}{\partial \boldsymbol{v}_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1(\alpha)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_a}\right)$$

$$= m_a \boldsymbol{v}_a + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{W}_a \tag{7-137}$$

ただし

$$\frac{1}{c^2}\boldsymbol{W}_a = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_a}\left\{L(1,2) - \frac{1}{2}\sum_b m_b \boldsymbol{v}_b{}^2\right\}$$

$$-\frac{Gm_1 m_2}{4c^4}\Bigg[-2\varepsilon_a\{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{a'})\boldsymbol{v}_a + (\boldsymbol{v}_{a'}\cdot\boldsymbol{\alpha}_{a'})\boldsymbol{n}\}$$

$$+2Gm_a\frac{\boldsymbol{v}_a}{r^2} + \varepsilon_a\left\{(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}_a}\right\}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}_a}(Gm_a \ln r - \boldsymbol{v}_{a'}{}^2 r)\Bigg]. \tag{7-138}$$

(7-136) は $\boldsymbol{\alpha}_a$ を含まず，$\boldsymbol{\alpha}_a$ について解くことができない．すなわち，拡張された Hessian 行列の階数が 0 であることに対応して，(7-136) は正準変数 $\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{v}_a$，$\boldsymbol{p}_a{}^{(1)}$ 間の 6 個の 1 次拘束条件式

$$\boldsymbol{\phi}_a^0(\boldsymbol{z}_b,\ \boldsymbol{v}_b,\ \boldsymbol{p}_b{}^{(1)}) = \boldsymbol{p}_a{}^{(1)} - \frac{G}{4c^4} m_a \boldsymbol{f}_a \approx 0 \tag{7-139}$$

となる．

また，Hamilton 関数は

$$H = \sum_{a=1}^{2}(\boldsymbol{p}_a{}^{(1)}\cdot\dot{\boldsymbol{z}}_{a(1)} + \boldsymbol{p}_a{}^{(0)}\cdot\dot{\boldsymbol{z}}_{a(0)}) - L(\alpha)$$

$$= H_0(\boldsymbol{z}_a,\ \boldsymbol{v}_a,\ \boldsymbol{p}_a{}^{(0)},\ \boldsymbol{p}_a{}^{(1)}) + \sum_{a=1}^{2} \boldsymbol{\alpha}_a \cdot \boldsymbol{\phi}_a^0 \qquad (7\text{-}140)$$

となる．ここで，正準 Hamilton 関数 H_0 は

$$H_0 = \sum_{a=1}^{2} \boldsymbol{p}_a{}^{(0)} \cdot \boldsymbol{v}_a - L(1,2) - \frac{G^2 m_1 m_2}{4c^4 r^2}\left(\frac{2Gm_1m_2}{r} - m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2 - m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2\right) \qquad (7\text{-}141)$$

で与えられ，実際には $\boldsymbol{p}_a{}^{(1)}$ に依存しない．したがって，Dirac の全 Hamilton 関数は $\boldsymbol{\alpha}_a$ を任意関数 $\boldsymbol{\xi}_a$ とおき

$$H_\mathrm{T} = H_0 + \sum_{a=1}^{2} \boldsymbol{\xi}_a \cdot \boldsymbol{\phi}_a^0 \qquad (7\text{-}142)$$

で与えられる．(7-133 a～e）にならって正準方程式を書き下すと

$$\dot{\boldsymbol{z}}_a = \frac{\partial H_\mathrm{T}}{\partial \boldsymbol{p}_a{}^{(0)}} \approx \boldsymbol{v}_a \qquad (7\text{-}143\,\mathrm{a})$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_a = \frac{\partial H_\mathrm{T}}{\partial \boldsymbol{p}_a{}^{(1)}} \approx \boldsymbol{\xi}_a \qquad (7\text{-}143\,\mathrm{b})$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_a{}^{(0)} = -\frac{\partial H_\mathrm{T}}{\partial \boldsymbol{z}_a} \approx \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}_a}\left\{L(1,2) + \frac{G^2 m_1 m_2}{4c^4 r^2}\left(\frac{2Gm_1m_2}{r} - m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2 - m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2\right)\right\}$$

$$+ \xi_1{}^i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}_a}\left\{\frac{Gm_1}{4c^4} n^i \left(\frac{Gm_1m_2}{r} - m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2\right)\right\}$$

$$- \xi_2{}^i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}_a}\left\{\frac{Gm_2}{4c^4} n^i \left(\frac{Gm_1m_2}{r} - m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2\right)\right\} \qquad (7\text{-}143\,\mathrm{c})$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_a{}^{(1)} = -\frac{\partial H_\mathrm{T}}{\partial \boldsymbol{v}_a} \approx -\boldsymbol{p}_a{}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_a}\left\{L(1,2)\right.$$

$$\left. + \frac{G^2 m_1 m_2}{4c^4 r^2}\left(\frac{2Gm_1m_2}{r} - m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2 - m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2\right)\right\}$$

$$+ \xi_1{}^i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_a}\left\{\frac{Gm_1}{4c^4} n^i \left(\frac{Gm_1m_2}{r} - m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2\right)\right\}$$

$$- \xi_2{}^i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_a}\left\{\frac{Gm_2}{4c^4} n^i \left(\frac{Gm_1m_2}{r} - m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2\right)\right\} \qquad (7\text{-}143\,\mathrm{d})$$

となる．(7 -143 d）は Ostrogradski 変換と等価であり，(7-143 a～d）および拘束方程式（7-139）から元の Lagrange 関数 $L(\alpha)$ に対する Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \boldsymbol{\alpha}_a}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \boldsymbol{v}_a}+\frac{\partial L(\alpha)}{\partial z_a}=0 \tag{7-144}$$

が再現される．これは時間に関する 3 階微分方程式である．

ところで，物体の運動を具体的に解く時には，Newton 近似を基礎にした c^{-1} 展開の逐次近似法を用いることが多い．その場合には，3 階の微分方程式(7-144)ではなく，それを 1 度 iteration(反復法)して得られる 2 階の微分方程式(5-141 b)を取り扱う*)．この運動方程式(5-141 b)に対応した正準形式はどのようにして得られるであろうか．この節の最初に述べた一般論から，2 階の微分方程式に帰着させた運動方程式に対応する正準形式を系統的に構成する理論体系はまだ確立していないが，答はわかっている．それを説明するために，$z^i_{a(0)}=z_a{}^i$，$z^i_{a(1)}=v_a{}^i$，$p^{(0)}_{ai}$，$p^{(1)}_{ai}$ を独立変数とした Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}$ を導入する：

$$\{f,g\}=\sum_{s=0}^{1}\sum_{a=1}^{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial z^i_{a(s)}}\cdot\frac{\partial g}{\partial p^{(s)}_{ai}}-\frac{\partial f}{\partial p^{(s)}_{ai}}\cdot\frac{\partial g}{\partial z^i_{a(s)}}\right\} \tag{7-145}$$

特に

$$\{z^i_{a(s)},\ p^{(s')}_{bj}\}=\delta_{ab}\delta^i{}_j\delta_s{}^{s'},\ \{z^i_{a(s)},\ z^j_{b(s')}\}=\{p^{(s)}_{ai},\ p^{(s')}_{bj}\}=0 \tag{7-146}$$
$$(a,b=1,2\,;\ i,j=1,2,3\,;\ s,s'=0,1).$$

これによって一般の力学量 $f(z,p,t)$ に対しては

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{f,H_{\mathrm{T}}\}\qquad \mathrm{mod}\,(\boldsymbol{\phi}^0_a), \tag{7-147}$$

となり，正準方程式（7-143 a～d）もこの Poisson 括弧の形式で記述される．ただし，上式で mod ($\boldsymbol{\phi}^0_a$) は拘束条件式 $\boldsymbol{\phi}^0_a\approx 0$ を考慮して等式の成立することを示す．

Lagrange 形式の運動方程式を 2 階の微分方程式に帰着させることは，解の中から $c^{-1}\longrightarrow 0$ の極限で Newton 力学の解と一致するものを選び出すことであり，(7-144) に拘束条件

*) §5-3 で注意したように，元の Lagrange 関数の中で運動方程式を使うことは一般的には許されない．またその結果から導かれる運動方程式は，iteration によって導かれる正しい運動方程式とは一致しない．

$$\boldsymbol{m}_a\boldsymbol{a}_a+\varepsilon_a G\frac{m_1 m_2}{r^2}\boldsymbol{n}=O(c^{-2}) \tag{7-148}$$

を課すことを意味する．正準形式では，これに対応して，Ostrogradski 変換（7-137）に（7-148）を適用することによって生じる新たな拘束条件

$$\boldsymbol{\phi}_a^1=\boldsymbol{p}_a^{(0)}-m_a\boldsymbol{v}_a-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{W}_a^{\mathrm{red}}(\boldsymbol{z}_b,\boldsymbol{v}_b)\approx 0 \tag{7-149 a}$$

ただし

$$\frac{1}{c^2}\boldsymbol{W}_a^{\mathrm{red}}(\boldsymbol{z}_b,\boldsymbol{v}_b)=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_a}\left[L(1,2)-\frac{1}{2}\sum_b m_b\boldsymbol{v}_b{}^2\right]-\frac{Gm_1m_2}{4c^4}\left[-2Gm_a\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_{a'})}{r^2}\boldsymbol{n}\right.$$

$$\left.+\varepsilon_a\left\{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}_a}\right\}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}_a}(Gm_a\ln r-\boldsymbol{v}_{a'}{}^2 r)\right] \tag{7-149 b}$$

が理論に付け加わる．$\boldsymbol{\phi}_a^0\approx 0$，$\boldsymbol{\phi}_a^1\approx 0$ は第2類拘束条件式であることがわかるので，この条件式によって運動は縮減された位相空間（$\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{p}_a=\boldsymbol{p}_a{}^{(0)}$）で記述される．

拘束系の正準形式の一般論に従って Dirac 括弧を定義するために，拘束条件 $\boldsymbol{\phi}_a^0\approx 0$，$\boldsymbol{\phi}_a^1\approx 0$ をまとめて

$$\theta_A=(\boldsymbol{\phi}_a^0,\ \boldsymbol{\phi}_a^1),\ (A=1,\ \cdots,\ 12)$$

と表わし，θ_A 同志の Poisson 括弧 $D_{AB}=\{\theta_A,\ \theta_B\}$ を要素とする行列Dを計算する．Dは正則であり，ppN 近似で必要な項までとると

$$D=\begin{pmatrix}\{\phi_{ai}^0,\ \phi_{bj}^0\}, & \{\phi_{ai}^0,\ \phi_{bj}^1\}\\ \{\phi_{ai}^1,\ \phi_{bj}^0\}, & \{\phi_{ai}^1,\ \phi_{bj}^1\}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\dfrac{G}{4c^4}\left(m_a\dfrac{\partial f_{ai}}{\partial v_b{}^j}-m_b\dfrac{\partial f_{bj}}{\partial v_a{}^i}\right), & m_a\delta_{ab}\delta_{ij}+O(c^{-2})\\ -m_a\delta_{ab}\delta_{ij}+O(c^{-2}) \quad , & O(c^{-2})\end{pmatrix} \tag{7-150}$$

となる．この逆行列は

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}O(c^{-2}) & , \quad -\dfrac{1}{m_a}\delta_{ab}\delta_{ij}+O(c^{-2})\\ \dfrac{1}{m_a}\delta_{ab}\delta_{ij}+O(c^{-2}), & -\dfrac{G}{4c^4}\left(\dfrac{1}{m_a}\dfrac{\partial f_{ai}}{\partial v_b{}^j}-\dfrac{1}{m_a}\dfrac{\partial f_{bj}}{\partial v_a{}^i}\right)\end{pmatrix} \tag{7-151}$$

である．

Dirac 括弧は

$$\{f,g\}^* = \{f,g\} - \sum_A \sum_B \{f,\theta_A\}(D^{-1})_{AB}\{\theta_B,g\} \tag{7-152}$$

で定義され，特に基本力学変数 $\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{p}_a = \boldsymbol{p}_a^{(0)}$ に対して

$$\{z_a{}^i, z_b{}^j\}^* = \sum_{c,d}\sum_{k,l}\{z_a{}^i, \phi^1_{ck}\}\frac{G}{4c^4}\left(\frac{1}{m_d}\frac{\partial f_{ck}}{\partial v_d{}^l} - \frac{1}{m_c}\frac{\partial f_{dl}}{\partial v_c{}^k}\right)\{\phi^1_{dl},\ z_b{}^j\} + O(c^{-6})$$

$$= -\frac{G}{4c^4}\left(\frac{1}{m_b}\frac{\partial f_{ai}}{\partial v_b{}^j} - \frac{1}{m_a}\frac{\partial f_{bj}}{\partial v_a{}^i}\right) + O(c^{-6})$$

$$= \delta_{ab'}\frac{G}{2c^4}\varepsilon_a(v_a{}^i n^j + v_{b'}{}^j n^i) + O(c^{-6}) \tag{7-153 a}$$

$$\{z_a{}^i, p_{bj}\}^* = \delta_{ab}\delta_{ij} - \sum_{c,d}\sum_{k,l}\{z_a{}^i, \phi^1_{ck}\}\frac{1}{m_c}\delta_{cd}\delta_{kl}\{\phi^0_{dl}, p_{bj}\} + O(c^{-6})$$

$$= \delta_{ab}\delta_{ij} + \frac{G}{4c^4}\frac{\partial}{\partial z_b{}^j}f_{ai} + O(c^{-6})$$

$$= \delta_{ab}\delta_{ij} + \varepsilon_a\varepsilon_b\frac{Gm_1m_2}{4c^4 r}\left[\frac{G}{r}(\delta_{ij} - 2n^i n^j)\right.$$

$$\left. - \frac{\boldsymbol{v}_{a'}{}^2}{m_a}(\delta_{ij} - n^i n^j)\right] + O(c^{-6}) \tag{7-153 b}$$

$$\{p_{ai}, p_{bj}\}^* = O(c^{-6}) \tag{7-153 c}$$

を得る．

このDirac括弧を用いると，運動方程式は

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,\ H^{\text{red}}\}^* \tag{7-154}$$

で記述される．ここで，H^{red} は (7-141) の正準Hamilton関数 H_0 に拘束条件 $\boldsymbol{\phi}^0_a = 0$，$\boldsymbol{\phi}^1_a = 0$ を普通の（強い意味の）等式として代入し $\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{p}_a$ の関数として得られるもので，**縮減 Hamilton 関数**と呼ぶ．具体的には (5-159) の $H(1,2)$ を $H(1,2) = H(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$ と表示すると

$$H^{\text{red}} = H(\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) + \frac{G^2}{4c^4}\left[-\frac{2Gm_1{}^2m_2{}^2}{r^3} + \frac{1}{r^2}(m_1\boldsymbol{p}_1{}^2 + m_2\boldsymbol{p}_2{}^2)\right] \tag{7-155}$$

で与えられる．Dirac括弧による運動方程式 (7-154) から，iteration による運動方程式 (5-141 b) が導かれるが，その計算は読者にゆだねよう．

c^{-4} の近似で，新しい変数 $\underline{\boldsymbol{z}_a}$，$\underline{\boldsymbol{p}_a}$ として

$$\underline{\boldsymbol{z}_a} = \boldsymbol{z}_a - \frac{G}{4c^4}\boldsymbol{f}_a, \qquad \underline{\boldsymbol{p}_a} = \boldsymbol{p}_a \tag{7-156}$$

を導入すると，基本 Dirac 括弧（7-153 a～c）は

$$\{\underline{z_a}^i, \underline{z_b}^j\}^* = \{\underline{p_{ai}}, \underline{p_{bj}}\}^* = 0, \quad \{\underline{z_a}^i, \underline{\boldsymbol{p}_{bj}}\}^* = \delta_{ab}\delta^i{}_j \tag{7-157}$$

という通常の正準形になる．これに対応して，$\underline{r} = [(\underline{\boldsymbol{z}_1} - \underline{\boldsymbol{z}_2})^2]^{1/2}$ と $r = [(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2)^2]^{1/2}$ の関係

$$\underline{r} = r\left[1 - \frac{G}{4c^4 r}\left(2G\frac{m_1 m_2}{r} - m_1 \boldsymbol{v}_1{}^2 - m_2 \boldsymbol{v}_2{}^2\right)\right] + O(c^{-6}) \tag{7-158}$$

を考慮すると

$$H^{\mathrm{red}} = H(\underline{\boldsymbol{z}_1}, \underline{\boldsymbol{z}_2}, \underline{\boldsymbol{p}_1}, \underline{\boldsymbol{p}_2}) \tag{7-159}$$

となる．(7-155) の右辺の第 2 項は (7-159) 中の $-Gm_1m_2/\underline{r}$ の中に吸収された．

このように，力学変数 $\underline{\boldsymbol{z}_a}$，$\underline{\boldsymbol{p}_a}$ と基本 Dirac 括弧 (7-157) に基づく縮減 Hamilton 関数 H^{red} による運動の記述は，力学変数 $\boldsymbol{z}_a$，$\boldsymbol{p}_a$ と基本 Poisson 括弧に基づいた $H(1,2)$ による記述と全く同型になり，物理的に等価であることがわかる．

第8章　重力場の量子論
—— S行列による多体重力ポテンシャル ——

§8-1　重力場の量子化

重力も物質間に働く基本の力である以上，素粒子間の相互作用を媒介するゲージ場の量子論があるのと同様に重力場の量子論も展開されなければならないであろう．これまで量子論を整合的に重力場に適用できるか否かという根本問題に対して満足すべき解答は与えられていなかった．このため，いろいろな試みがなされ，最近大きな進歩もあったが解決されたとはいえない状態である．

重力場を量子化する方法として，§6-4でふれたWheeler-De Wittによるものがある．これは宇宙論のような対象には魅力的であるが，素粒子を含むような系の場合には，どう進めてよいか不明である．電磁場の量子化では，Coulombゲージをとり量子化するのがわかりやすかった．重力場の量子論でこれに対応するものとして，力学系の時間的発展を見るのに第6章のADMの方法をとり，拘束方程式を解いて正準量子化を行う方法がまず考えられる．しかし，この方法では，原理的にはともかく表面上は，一般共変性はもちろん，Lorentz不変性も明白には保たれない．また，古典的な拘束方程式を解くことは難しく，第6章で行ったような摂動展開に頼らざるを得ない．以下では，これまでの素粒子の場の理論との共存を保つため，Lorentz不変性の要請のみは前提として量子化を進める．すなわち，Heisenberg表示での整合性が保証されるような定式化から出発して，相互作用表示に移り，摂動論によってS行列を求める方法をとる．なお本章以降では簡単のため$\hbar=c=1$の単位系を用いる．

本章で議論する整合的な重力場の量子化とは，量子論で必要な確率解釈が可能であるということを意味する．このことが可能なためには，散乱を表現するS行列のユニタリティが保証されなければならない．重力場および重力場と類似した非線形場であるYang-Mills場においてS行列のユニタリティを保つためには，重力場やYang-Mills場のループが現れるときには，外部の物質場とは相互作用しない

Fermi統計に従う仮想的なスカラー粒子(ゴースト)を導入しなければならないことが，1ループの場合にFeynmanやDe Wittにより早くから(1963年)指摘されていた．経路積分を用いてこの結果を導き出したのはFaddeevとPopovである．このため，この仮想的な粒子をFaddeev-Popovのゴースト（FPゴースト）と呼ぶ．Yang-Mills場に対するこの問題をHeisenberg表示において，BRST（C.Becchi, A.Rouet, R.Storaの3人とI.V.Tyutinによる）変換［1］による方法を用いて解決したのが，九後-小嶋である［2］．この方法は重力場に対しても有効であることが指摘された．Lorentz不変性の代りに一般線形不変性をもとにした一般論も中西によって展開されている［3］．本節ではLorentz不変性のもとで九後-小嶋による重力場の量子化の概略を述べる．整合性の第2の問題である $\hbar\to 0$ の極限で古典論を再現するかどうかは§8-3でふれる．

重力場のLagrange関数としては(5-92)で与えた $\sqrt{-g}R$ を用いて

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{G}}=\boldsymbol{L}'_{\mathrm{G}}+\partial_\mu\mathscr{D}^\mu, \tag{8-1}$$

$$\boldsymbol{L}'_{\mathrm{G}}=-\frac{2}{\varkappa^2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\rho\lambda}-\Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda})$$

$$=-\frac{1}{2\varkappa^2}\left(\tilde{g}^{\rho\sigma}\tilde{g}_{\lambda\mu}\tilde{g}_{\kappa\nu}-2\delta^\sigma{}_\kappa\delta^\rho{}_\lambda\tilde{g}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma}\tilde{g}_{\mu\kappa}\tilde{g}_{\lambda\nu}\right)\partial_\rho\tilde{g}^{\mu\kappa}\partial_\sigma\tilde{g}^{\nu\lambda} \tag{8-2 a}$$

$$\mathscr{D}^\mu=-\frac{2}{\varkappa^2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda}-g^{\rho\sigma}\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma})=-\frac{2}{\varkappa^2}\left(\frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{g}_{\alpha\beta}\partial_\nu\tilde{g}^{\alpha\beta}+\partial_\nu\tilde{g}^{\mu\nu}\right). \tag{8-2 b}$$

ここで，$\varkappa^2$ はNewton重力常数 G と

$$\varkappa^2=32\pi G \tag{8-3}$$

で結ばれている*)．また

$$\tilde{g}^{\mu\nu}=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu},\quad \tilde{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}/\sqrt{-g}\,. \tag{8-4}$$

*) $\hbar=c=1$ の単位系では，$\varkappa\simeq 2\times 10^{-22}(m_e)^{-1}\simeq 4\times 10^{-19}(\mathrm{Gev})^{-1}$，ただし m_e は電子質量．

無限小な一般座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x)$ に対応した，$\tilde{g}^{\mu\nu}$ の Lie 微分 $\mathscr{L}_C\tilde{g}^{\mu\nu}$ は*)

$$\mathscr{L}_C\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{g}'^{\mu\nu}(x) - \tilde{g}^{\mu\nu}(x) = \mathscr{D}^{\mu\nu}{}_\rho\delta x^\rho \tag{8-5 a}$$

$$\mathscr{D}^{\mu\nu}{}_\rho = \tilde{g}^{\mu\sigma}\delta^\nu{}_\rho\partial_\sigma + \tilde{g}^{\sigma\nu}\delta^\mu{}_\rho\partial_\sigma - \tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\rho - (\partial_\rho\tilde{g}^{\mu\nu}) \tag{8-5 b}$$

と書かれる．L'_G に対する Lie 微分は

$$\mathscr{L}_C L'_G = -\partial_\mu(\delta x^\mu L_G + \mathscr{L}_C\mathscr{D}^\mu) \tag{8-6}$$

と 4 次元発散形で表わされ，作用関数には効かない．

無限小座標変換はゲージ変換の 1 種とみなされるので，この意味で重力場もゲージ場である．電磁場において既に知っているように，ゲージ場を量子化する場合にはゲージ固定を行わねばならない．そのためにゲージ固定項を導入すると，一般座標変換のもとでの理論の不変性が失われる．それに代るものとして，以下に示すように BRST 変換が導入される．

BRST 変換は，(8-5 a)の Lie 微分の中の δx^μ を FP ゴースト場 $c^\mu(x)$ で置き換えた

$$\delta_B\tilde{g}^{\mu\nu} = \varkappa\lambda\mathscr{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho \tag{8-7}$$

で与えられる．L'_Gに対する BRST 変換 $\delta L'_G$ は，(8-6) と同形の

$$\delta_B L'_G = -\partial_\mu(\varkappa\lambda c^\mu L_G + \delta_B\mathscr{D}^\mu) \tag{8-8}$$

となる．(8-7)，(8-8)の λ は座標 x^μ に依存せず，ゴースト場と反可換なパラメータである．

ここで，Lagrange 未定乗数場 $B_\mu(x)$ を導入して，ゲージ固定項として

$$L_{GF} = -\frac{1}{\varkappa}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu + \frac{\alpha}{4}\eta^{\mu\nu}B_\mu B_\nu \tag{8-9}$$

ととることにしよう．L_{GF} は明らかに(8-7)の BRST 変換に対して不変ではない．この困難を除くため，独立な 2 つのエルミートな FP ゴースト場 $\bar{c}_\mu(x)$，$c^\nu(x)$

---

*) Lie 微分は，点 x における関数（テンソル）の値 $T^{\mu\cdots\nu}(x)$ と座標変換した $T'^{\mu\cdots\nu}(x')$ を元の点 x に引きもどした値 $T'^{\mu\cdots\nu}(x)$ との差によって定義される．Lie 微分と普通の微分演算とは可換である．詳しい解説は第 1 章の文献［2］を参照されたい．

によって(8-7)との対応から*)

$$L_{\mathrm{FP}} = -i\partial_\mu \bar{c}_\nu \mathscr{D}^{\mu\nu}{}_\rho c^\rho \tag{8-10}$$

を導入し，BRST 変換を次のように定義しよう．

$$\delta_{\mathrm{B}} c^\mu = -\chi\lambda c^\rho \partial_\rho c^\mu \tag{8-11 a}$$

$$\delta_{\mathrm{B}} \bar{c}_\mu = i\lambda B_\mu \tag{8-11 b}$$

$$\delta_{\mathrm{B}} B_\mu = 0. \tag{8-11 c}$$

(8-7)と(8-11)より，BRST 変換に対する不変性が回復し

$$\delta_{\mathrm{B}}(L_{\mathrm{GF}} + L_{\mathrm{FP}}) = 0 \tag{8-12}$$

が満たされることが示される．したがって，全作用関数 $\int d^4x(L_{\mathrm{G}} + L_{\mathrm{GF}} + L_{\mathrm{PF}})$ は δ_{B} 変換に対し不変である．(8-11 b)，(8-11 c)から直ちに $\delta_{\mathrm{B}}{}^2(\bar{c}_\mu) = \delta_{\mathrm{B}}{}^2(B_\mu) = 0$ がわかる．いくらかの計算の後に，$\delta_{\mathrm{B}}{}^2(c^\mu) = \delta_{\mathrm{B}}{}^2(\tilde{g}^{\mu\nu}) = 0$ も満たされることがわかる．すなわち BRST 変換の重要な性質として，外微分 d の場合に $d^2 = 0$ であったと同様なベキ零性 $\delta_{\mathrm{B}}{}^2 = 0$ を満たすことを示している．

BRST 変換に対応する，Noether 流 $J_{\mathrm{B}}{}^\mu$ は，次式で与えられる．

$$\lambda J_{\mathrm{B}}{}^\mu = \sum_{\Phi = (\tilde{g}, \mathrm{B}, \mathrm{c}, \bar{c})} \left(\delta_{\mathrm{B}} \Phi \frac{\partial (L - \partial_\lambda \mathscr{D}^\lambda)}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) + \chi\lambda c^\mu L_{\mathrm{G}} + \delta_{\mathrm{B}} \mathscr{D}^\mu. \tag{8-13}$$

ただし

$$L = L_{\mathrm{G}} + L_{\mathrm{GF}} + L_{\mathrm{FP}} \tag{8-14}$$

である．保存量である Noether 電荷

$$Q_{\mathrm{B}} = \int d^3x J_{\mathrm{B}}{}^0 \tag{8-15}$$

は，BRST 変換の生成演算子で，理論が整合的であれば

$$\delta_{\mathrm{B}} \Phi = i[\lambda Q_{\mathrm{B}}, \Phi] \quad ; \quad Q_{\mathrm{B}}{}^2 = 0 \tag{8-16}$$

を満たすべきであろう**)．

---

*)　$\tilde{g}^{\mu\nu}$，B_μ が Bose 場であるのに対して，$\bar{c}_\mu, c^\nu$ は Fermi 場である．

**)　実際の証明には場の量の間の同時刻の交換関係式が必要である．

電磁場の場合には，確率解釈を破る負ノルム状態を除くため，$(\partial_\mu A^\mu)$の正振動数部分$(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}$を用いて，負ノルムを含まない物理的状態をとり出す条件式として

$$(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{8-17}$$

を置いた．電磁場のような線形場では$(\partial_\mu A^\mu)$は自由場の方程式を満たすので，(8-17)の付加条件式（Guptaの条件）は矛盾なく用いられるが，重力場のような非線形場では，近似以外には自由場の方程式は満たされないので(8-17)型の条件式を物理的状態をとり出す条件式として採用することはできない．重力場の場合には，九後-小嶋に従って，保存電荷Q_Bを用いて

$$Q_B|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{8-18}$$

として物理的状態をとり出すべきである．実際，この条件によって，非物理的状態が除かれることが示されている．本書では以後，Minkowski時空を背景場として摂動論を展開していくので，これ以上立ち入らない．詳しいことは，文献［2，3］を参照されたい．

§8-2　Minkowski時空を背景場とした共変正準量子化

重力場の量子化によって出現する重力子の媒介による素粒子間の相互作用から物体(天体)間の多体の重力ポテンシャル（詳しいことは§8-3で述べる）を求めるため，$\tilde{g}^{\mu\nu}$を次のように置き換える．

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \varkappa\gamma^{\mu\nu}. \tag{8-19}$$

ここで$\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$で，以後テンソルの添字はすべて$\eta^{\mu\nu}$，$\eta_{\mu\nu}$で上げ，下げする．重力場の変数を$\gamma^{\mu\nu}$と考えると自由場の共変量子化には都合がよい．

(8-14)で与えたLagrange関数は，(8-19)を用いれば

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0 + \boldsymbol{L}_{\mathrm{int}} \tag{8-20}$$

となる．ここで$\boldsymbol{L}_0$は場の量を2次まで，$\boldsymbol{L}_{\mathrm{int}}$は3次以上含む項である．$\boldsymbol{L}_0$の形は

$$\boldsymbol{L}_0 = -\frac{1}{2}\left[\partial_\lambda\gamma^{\mu\nu}\partial^\lambda\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\lambda\gamma^\mu{}_\mu\partial_\lambda\gamma^\nu{}_\nu - 2\partial^\mu\gamma_{\mu\lambda}\partial_\nu\gamma^{\nu\lambda}\right]$$
$$+\partial^\lambda\gamma_{\lambda\rho}B^\rho + \frac{\alpha}{4}B_\mu B^\mu - i\partial_\mu\bar{c}^\nu\partial^\mu c_\nu. \tag{8-21}$$

ここで4次元発散項は作用関数に効かないので落とした．$\boldsymbol{L}_{\mathrm{int}}$の中でFPゴースト場$\bar{c}_\mu$，$c_\nu$を含む項は次のように書ける．

$$L_{\rm int}^{\rm FP} = -i\kappa\partial_\mu \bar{c}_\nu(\gamma^{\mu\sigma}\delta^\nu{}_\rho + \gamma^{\sigma\nu}\delta^\mu{}_\rho)\partial_\sigma c^\rho + i\kappa\partial_\mu \bar{c}_\nu \partial_\rho(\gamma^{\mu\nu}c^\rho). \tag{8-22}$$

ゴースト場 $\bar{c}_\mu$，c_ν と重力場 $\gamma^{\mu\nu}$ とが相互作用している点が重要である．今 $\boldsymbol{L}_{\rm int}$ を相互作用とみなし，自由場 $\boldsymbol{L}_0$ のみを考えると，(8-21)の中で，ゴースト場 $\bar{c}_\mu$，c_ν は $\gamma^{\mu\nu}$，B_μ とは独立であり，ゴースト場は別個に考えればよい．(8-21)から導かれる運動方程式は，

$$\Box\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box\gamma^\lambda{}_\lambda - \partial_\mu\partial^\lambda\gamma_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial^\lambda\gamma_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\partial_\mu B_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu B_\mu = 0 \tag{8-23}$$

$$\partial^\nu\gamma_{\mu\nu} = -\frac{\alpha}{2}B_\mu \tag{8-24}$$

$$\Box\,\bar{c}_\mu = 0,\quad \Box\, c_\mu = 0 \tag{8-25}$$

である．ここで α はゲージのパラメータであり $\alpha=0$ のときを Landau ゲージあるいは de Donder ゲージと呼び，$\alpha=1$ が Feynman ゲージと呼ばれる．

$\gamma_{\mu\nu}$，B_μ，c_μ，$\bar{c}_\mu$ に対する正準共役運動量は，$\gamma_{\mu\nu}=\gamma_{\nu\mu}$ を考慮して，

$$\pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{L}_0}{\partial(\partial_0\gamma_{\mu\nu})}$$

$$= \partial_0\gamma^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_0\gamma^\lambda{}_\lambda + \eta^{\mu 0}\left(\partial_\lambda\gamma^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}B^\nu\right) + \eta^{\nu 0}\left(\partial_\lambda\gamma^{\lambda\mu} + \frac{1}{2}B^\mu\right) \tag{8-26}$$

$$\pi_B{}^\mu = \partial\boldsymbol{L}_0/\partial(\partial_0 B_\mu) = 0 \tag{8-27}$$

$$\pi_c{}^\mu = \partial^l\boldsymbol{L}_0/\partial(\partial_0 c_\mu) = -i\partial_0\bar{c}^\mu\ ;\ \pi_{\bar{c}}{}^\mu = \partial^l\boldsymbol{L}_0/\partial(\partial_0\bar{c}_\mu) = i\partial_0 c^\mu. \tag{8-28}$$ *)

(8-26)式から次の拘束条件式が導かれる

$$\Phi^{00} = \pi^{00} + \pi^i{}_i - 2\partial^i\gamma_{i0} - B_0 = 0 \tag{8-29 a}$$

$$\Phi^{0i} = \pi^{0i} + \partial^j\gamma_{ij} + \frac{1}{2}B_i = 0. \tag{8-29 b}$$

正準変数の間の 0 でない同時刻の(反)交換関係式として次式を設定する．

$$[\gamma_{\mu\nu}(x),\ \pi^{\lambda\rho}(y)] = \frac{i}{2}(\delta^\lambda{}_\mu\delta^\rho{}_\nu + \delta^\lambda{}_\nu\delta^\rho{}_\mu)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8-30 a}$$

$$[B_\mu(x),\ \pi_{\rm B}{}^\nu(y)] = i\delta^\nu{}_\mu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8-30 b}$$

$$\{c_\mu(x),\ \pi_c{}^\nu(y)\} = \{\bar{c}_\mu(x),\ \pi_{\bar{c}}{}^\nu(y)\} = i\delta^\nu{}_\mu\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{8-30 c}$$

---

*）$\partial^l\boldsymbol{L}_0/\partial(\partial_0 c_\mu)$ の添字 l は左微分，$\partial^l f(q)/\partial q = (\delta q)^{-1}\delta f(q)$ の意味である．

この交換関係により，(8-29)の $\Phi^{0\mu}$ および

$$\Phi_B{}^{\mu} = \pi_B{}^{\mu} = 0 \tag{8-29 c}$$

の間の同時刻交換関係式は 0 でなく，これらは Dirac の第 2 類拘束条件式であることを注意しておく．

同時刻の正準交換関係式を用いて，一般の 4 次元交換関係式を求めよう．そのため，(8-23)の対角和をとり，(8-24)を考慮すると

$$\Box\, \gamma^{\lambda}{}_{\lambda} = -(1-\alpha)\partial_\lambda B^\lambda \tag{8-31 a}$$

$$\Box\, \gamma_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(1-\alpha)\partial_\lambda B^\lambda - \frac{1}{2}(1-\alpha)(\partial_\mu B_\nu + \partial_\nu B_\mu) = 0. \tag{8-31 b}$$

(8-31 b)を x^ν について微分し ν について和をとり(8-24)を考慮すると次式を得る．

$$\Box\, B_\mu = 0 \tag{8-32 a}$$

$$\Box^2\, \gamma_{\mu\nu} = 0. \tag{8-32 b}$$

時間 z^0 に初期値を与えた場合のこれらの式の解は

$$B_\mu(x) = -\int d^3z D(x-z)\overleftrightarrow{\partial_0^z} B_\mu(z) \tag{8-33}$$

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = -\int d^3z D(x-z)\overleftrightarrow{\partial_0^z}\gamma_{\mu\nu}(z) - \int d^3z \tilde{D}(x-z)\overleftrightarrow{\partial_0^z}\,\Box\,\gamma_{\mu\nu}(z) \tag{8-34}$$

と表わされる．ただし，∂ の上の↔印は $f\overleftrightarrow{\partial_0^z}g = f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z^0} - \dfrac{\partial f}{\partial z^0}\cdot g$ を意味している．

$D(x-z)$，$\tilde{D}(x-z)$は

$$D(x-z) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\varepsilon(k^0)\delta(k^2)e^{ik_\mu(x^\mu - z^\mu)} \tag{8-35}$$

$$\tilde{D}(x-z) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4k\varepsilon(k^0)\delta'(k^2)e^{ik_\mu(x^\mu - z^\mu)},\ d^4k = d^3kdk^0. \tag{8-36}$$

ここで $\varepsilon(k^0) = k^0/|k^0|$ で，D，$\tilde{D}$ は次式を満たす．

$$\partial_0 D(x-z)|_{x^0=z^0} = -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\,;\ \ \partial_0{}^3\tilde{D}(x-z)|_{x^0=z^0} = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})$$

$$\Box\, \tilde{D}(x-z) = D(x-z) = -\frac{1}{2\pi}\varepsilon(x^0-z^0)\delta\{(x_\mu - z_\mu)(x^\mu - z^\mu)\}. \tag{8-37}$$

(8-33)，(8-34)を用いて，$\gamma_{\mu\nu}(x)$，$B_\mu(x)$ と $\gamma_{\lambda\rho}(y)$，$B_\lambda(y)$ との交換関係を

求めるためには，(8-33)，(8-34)の $\partial_0 B_\mu(z)$，$\partial_0\gamma_{\mu\nu}(z)$，$\Box\gamma_{\mu\nu}(z)$，$\Box\partial_0\gamma_{\mu\nu}(z)$ を正準変数で表わし，同時刻正準交換関係式(8-30)を用いねばならない．そこで次のいくつかの式に注目しよう．まず，$\partial^\mu\partial^\nu\gamma_{\mu\nu}=-\frac{\alpha}{2}\partial^\mu B_\mu$ を考慮すると(8-23)の $\Box\gamma_{\mu 0}$ に対する式は次のように書ける．

$$\begin{aligned}&\triangle\gamma_{00}-\partial^i\partial^j\gamma_{ij}-\frac{1}{2}\partial^i B_i-\frac{1}{2}\partial_0 B_0=0\\&\triangle\gamma_{0i}-\partial_j\pi^{ij}-\partial_i\pi^{00}+\partial_i\partial^j\gamma_{0j}+\frac{1}{2}\partial_i B_0-\frac{1}{2}\partial_0 B_i=0.\end{aligned}\tag{8-38}$$

また

$$\begin{aligned}&\partial^\mu B_\mu=2\{-\triangle\gamma_{00}+\partial^i\partial^j\gamma_{ij}+\partial^i B_i\}\\&\partial_0(\partial^\mu B_\mu)=2\{\triangle\pi^k{}_k-\partial_i\partial_j\pi^{ij}-\triangle B_0\}.\end{aligned}\tag{8-39}$$

(8-24)，(8-26)から

$$\begin{aligned}&\partial_0\gamma_{00}=\frac{1}{2}(\pi^{00}+\pi^i{}_i)-\frac{1}{2}(1-\alpha)B_0\\&\partial_0\gamma_{0i}=-\pi^{0i}-\frac{1}{2}(1-\alpha)B_i\\&\partial_0\gamma_{ij}=\pi^{ij}+\frac{1}{2}\eta^{ij}\{\pi^{00}-\pi^k{}_k-(1-\alpha)B_0\}.\end{aligned}\tag{8-40}$$

以上の式を用いて，(8-33)，(8-34)より次の4次元交換関係式が得られる．

$$\begin{aligned}[\gamma_{\mu\nu}(x),\gamma_{\lambda\rho}(y)]=&\frac{i}{2}(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}+\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho})D(x-y)\\&-\frac{i}{2}(1-\alpha)\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho}D(x-y)-\frac{i}{2}(1-\alpha)(\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\rho\\&+\eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\lambda+\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\lambda+\eta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\rho-2\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda\partial_\rho-2\eta_{\lambda\rho}\partial_\mu\partial_\nu)\tilde{D}(x-y)\end{aligned}\tag{8-41 a}$$

$$[\gamma_{\mu\nu}(x),B_\lambda(y)]=i(\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu+\eta_{\nu\lambda}\partial_\mu)D(x-y)-i\eta_{\mu\nu}\partial_\lambda D(x-y)\tag{8-41 b}$$

$$[B_\mu(x),B_\nu(y)]=0.\tag{8-41 c}$$

Fermi 場である $c_\mu,\bar{c}_\nu$ に対しても同様にして，0でない4次元反交換関係式として

$$\{c_\mu(x),\bar{c}_\nu(y)\}=-\eta_{\mu\nu}D(x-y)\tag{8-41 d}$$

を得る．

自由場の Lagrange 関数 $\boldsymbol{L}_0$ をもとにした場合の BRST 変換（8-7），(8-11)は

$$\begin{aligned}&\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}\gamma_{\mu\nu}=\lambda\{\partial_\mu c_\nu+\partial_\nu c_\mu-\eta_{\mu\nu}\partial^\lambda c_\lambda\}\\&\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}c_\mu=\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}B_\mu=0\\&\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}\bar{c}_\mu=i\lambda B_\mu\end{aligned}\tag{8-42}$$

で与えられ，(8-15)の Q_{B} は

$$Q_{\mathrm{B}}{}^{(0)}=\int d^3xB_\lambda\overleftrightarrow{\partial^0}c^\lambda\tag{8-43}$$

となる．(8-16)に対応する次の式

$$\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}\Phi=i[\lambda Q_{\mathrm{B}}{}^{(0)},\Phi]\tag{8-44}$$

が上の(8-42)の $\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}\boldsymbol{\Phi}$，(8-43)の $Q_{\mathrm{B}}{}^{(0)}$ によって満たされていることが，交換関係式(8-41 b)，(8-41 d)によってわかる．

物理的状態をえらび出す条件式(8-18)は

$$Q_{\mathrm{B}}{}^{(0)}|\mathrm{phys}\rangle=\int d^3xB_\lambda\overleftrightarrow{\partial^0}c^\lambda|\mathrm{phys}\rangle=0\tag{8-45}$$

で与えられる．

$\gamma_{\mu\nu}$，B_μ，c_μ，$\bar{c}_\mu$ 等を運動量表示で表わし，

$$\Phi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\frac{1}{\sqrt{2k^0}}(\Phi(\boldsymbol{k})e^{ik_\mu x^\mu}+\Phi^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-ik_\mu x^\mu})\ ;\ k^0=|\boldsymbol{k}|\tag{8-46}$$

とし，$\Phi(\boldsymbol{k})$，$\Phi^\dagger(\boldsymbol{k})$ をそれぞれ，消滅演算子，生成演算子とする．座標系を適当にとり，4 次元運動量 k_μ が$(k_0, 0, 0, k_3)$となるようにしよう．$\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})$の横波部分は，(5-71)の定義と，(8-46)から，

$$\gamma_1{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_{11}(\boldsymbol{k})-\gamma_{22}(\boldsymbol{k})),\quad\gamma_2{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})=\sqrt{2}\,\gamma_{12}(\boldsymbol{k})\tag{8-47}$$

となる．この成分に対しては，$\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}\gamma_1{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})=\delta_{\mathrm{B}}{}^{(0)}\gamma_2{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})=0$ である．交換関係は*)

$$[\gamma_i{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}),\ (\gamma_j{}^{\mathrm{T}})^\dagger(\boldsymbol{k}')]=\eta_{ij}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\ ;\quad i,\ j=1,\ 2\tag{8-48}$$

これ以外は 0 である．横波以外の非物理的な成分として(縦波部分にあたる)

---

*) Feynman ゲージ $\alpha=1$ で(8-41 a)を運動量表示で書くと

$$[\gamma_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}),\ \gamma_{\lambda\rho}(\boldsymbol{k}')]=\frac{1}{2}(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}+\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho})\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').$$

$$\chi_0(\boldsymbol{k}) = -\frac{i}{2k^0}\{\gamma_{00}(\boldsymbol{k})+\frac{1}{2}\gamma^\lambda{}_\lambda(\boldsymbol{k})\}$$

$$\chi_i(\boldsymbol{k}) = -\frac{i}{k^0}\gamma_{0i}(\boldsymbol{k}),\quad i=1,\ 2 \tag{8-49}$$

$$\chi_3(\boldsymbol{k}) = \frac{i}{2k_3}\{\gamma_{33}(\boldsymbol{k})-\frac{1}{2}\gamma^\lambda{}_\lambda(\boldsymbol{k})\}$$

をとる．(8-42)と(8-44)の関係式は次のように表わされる．

$$[Q_{B}{}^{(0)},\ \gamma_i{}^{T}(\boldsymbol{k})]=0,\quad i=1,\ 2$$
$$[Q_{B}{}^{(0)},\ \chi_\mu(\boldsymbol{k})]=-ic_\mu(\boldsymbol{k})\,;\,\{Q_B{}^{(0)},\ \bar{c}_\mu(\boldsymbol{k})\}=B_\mu(\boldsymbol{k}) \tag{8-50}$$
$$[Q_B{}^{(0)},\ B_\mu(\boldsymbol{k})]=\{Q_B{}^{(0)},\ c_\mu(\boldsymbol{k})\}=0.$$

ここで，上の関係式を満たす4個の組，$\chi_\mu(\boldsymbol{k})$，$B_\mu(\boldsymbol{k})$，$c_\mu(\boldsymbol{k})$，$\bar{c}_\mu(\boldsymbol{k})$は九後-小嶋のカルテットと呼ばれ，付加条件(8-45)のもとで物理的状態から排除される．物理的状態として残るのは2個の横波成分$\gamma_1{}^{T}(\boldsymbol{k})$，$\gamma_2{}^{T}(\boldsymbol{k})$だけである．

われわれは，いま自由場を扱っているので付加条件$Q_B{}^{(0)}|\mathrm{phys}\rangle=0$は，従来の線形場の理論と関係をもつべきであろう．実際$Q_B{}^{(0)}$を運動量表示で書くと

$$Q_B{}^{(0)}=i\sum_{\boldsymbol{k}}(c_\mu{}^\dagger(\boldsymbol{k})B^\mu(\boldsymbol{k})-B_\mu{}^\dagger(\boldsymbol{k})c^\mu(\boldsymbol{k})) \tag{8-51}$$

となる．既に述べたように，$\boldsymbol{L_0}$の範囲ではFPゴースト$c_\mu, \bar{c}_\nu$は$\gamma_{\mu\nu}, B_\mu$とは相互作用しないので，状態として$c_\mu, \bar{c}_\nu$については真空の状態$|0\rangle_{c,\bar{c}}$をとり$|\mathrm{phys}\rangle=|\mathrm{phys}\rangle_{\gamma,B}\otimes|0\rangle_{c.\bar{c}}$とおくことができる．したがって付加条件は

$$\sum_{\boldsymbol{k}}B_\mu(\boldsymbol{k})|\mathrm{phys}\rangle_{\gamma,B}\otimes|c^\mu(\boldsymbol{k})^\dagger|0\rangle_{c,\bar{c}}=0 \tag{8-52}$$

となるが，$c^\mu(\boldsymbol{k})^\dagger|0\rangle_{c,\bar{c}}$は線形独立なので，すべての$\boldsymbol{k}$に対して$B_\mu(\boldsymbol{k})|\mathrm{phys}\rangle=0$となる．結局各$x$に対して

$$B_\mu{}^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle_{\gamma,B}=0 \tag{8-53}$$

となる．これは(8-24)の$\partial^\nu\gamma_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\alpha B_\mu=0$を用いると電磁場の場合の(8-17)と同等のものである．自由場の場合は，これは当然のことといえるかもしれないが，近似によらず量子化を行う際には(8-18)の条件式が不可欠なものであることを示している．

(8-47)で与えた横波部分 $\gamma_i{}^{\mathrm{T}}(i=1,\ 2)$ がスピン2であることを示しておく．スピン角運動量は

$$S_{ij} = \int d^3x\partial_0 f_{ij} \tag{8-54}$$

で与えられる．$\partial_\rho f_{\mu\nu}$ は Lorentz 変換 $\delta x^\mu = \delta\omega^{\mu\nu}x_\nu$ に現われる $\delta\omega^{\mu\nu}$ を用いて次式で定義される．

$$\partial_\rho f_{\mu\nu} = -\frac{\delta\gamma_{\lambda\sigma}}{\delta\omega^{\mu\nu}}\frac{\partial \boldsymbol{L}_0'}{\partial(\partial_\rho\gamma_{\lambda\sigma})} = 2(\gamma_{\nu\sigma}\partial_\rho\gamma^\sigma{}_\mu - \gamma_{\mu\sigma}\partial_\rho\gamma^\sigma{}_\nu). \tag{8-54'}$$

ここで $\boldsymbol{L}_0'$ は (8-21) の右辺の第1項（[　　]の項）をあらわす．$(k_0, 0, 0, k_3)$ の座標系で考えると S_{ij} としては S_{12} 成分のみとなり，運動量表示で S_{12} を表わすと

$$S_{12} = 2i\sum_{\boldsymbol{k}}\{(\gamma_2{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}))^\dagger\gamma_1{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}) - (\gamma_1{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}))^\dagger\gamma_2{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k})\}$$

となる．ここで

$$\gamma_\pm(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_1{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}) \mp i\gamma_2{}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}))$$

を導入すると，これらの間の交換関係式は

$$[\gamma_+(\boldsymbol{k}), \gamma_+{}^\dagger(\boldsymbol{k}')] = [\gamma_-(\boldsymbol{k}), \gamma_-{}^\dagger(\boldsymbol{k}')] = \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'),\ \text{他は}\ 0,$$

となり，S_{12} は

$$S_{12} = \sum_{\boldsymbol{k}} 2[\gamma_+{}^\dagger(\boldsymbol{k})\gamma_+(\boldsymbol{k}) - \gamma_-{}^\dagger(\boldsymbol{k})\gamma_-(\boldsymbol{k})] = \sum_{\boldsymbol{k}} 2(n_+(\boldsymbol{k}) - n_-(\boldsymbol{k})) \tag{8-55}$$

となる．つまり，S_{12} は $\gamma_\pm(\boldsymbol{k})$ に対応する重力子の数 $n_\pm(\boldsymbol{k})$ によって表わされ，スピンが2であることを示している．

終りに，これから行う摂動展開の計算に便利な重力変数に対する4次元交換関係式を与えておく．物質場と重力場の相互作用は，物質場のエネルギー・運動量テンソルを $T^{\mu\nu}$ とすると，相互作用 Lagrange 関数

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\varkappa\left(\gamma^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\gamma^\lambda{}_\lambda\right)T_{\mu\nu} \tag{8-56}$$

で与えられる．したがって，新しく

$$-\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\gamma^\lambda{}_\lambda \tag{8-57}$$

を重力場の変数と考えよう．これは前章まで用いた $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ の $h_{\mu\nu}$ と

$$h_{\mu\nu}=\varkappa\tilde{\varphi}_{\mu\nu}+O(\varkappa^2) \tag{8-57}$$

で結ばれている．(8-57)と(8-41 a)より次の4次元交換関係式を得る．

$$[\tilde{\varphi}_{\mu\nu}(x),\ \tilde{\varphi}_{\lambda\rho}(y)]=\frac{i}{2}(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}+\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho})D(x-y)$$

$$-\frac{i}{2}(1-\alpha)(\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\rho+\eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\lambda+\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\lambda+\eta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\rho)\tilde{D}(x-y). \tag{8-58}$$

この $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ を用いると(8-21)の $\boldsymbol{L}_0$ は

$$\boldsymbol{L}_0=-\frac{1}{2}[\partial_\lambda\tilde{\varphi}^{\mu\nu}\partial^\lambda\tilde{\varphi}_{\mu\nu}-\partial_\lambda\tilde{\varphi}^{\mu}{}_{\mu}\partial^\lambda\tilde{\varphi}^{\nu}{}_{\nu}-2\partial_\mu\tilde{\varphi}^{\mu\lambda}\partial^\nu\tilde{\varphi}_{\nu\lambda}+2\partial^\mu\tilde{\varphi}_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\varphi}^{\lambda}{}_{\lambda}]$$

$$-\partial^\lambda\left(\tilde{\varphi}_{\lambda\rho}-\frac{1}{2}\eta_{\lambda\rho}\tilde{\varphi}^{\nu}{}_{\nu}\right)B^\rho+\frac{\alpha}{4}B_\mu B^\mu-i\partial_\mu\bar{c}^\nu\partial^\mu c_\nu. \tag{8-59}$$

ここで $\alpha\neq0$ なら $B_\mu=\dfrac{2}{\alpha}\partial^\lambda\left(\tilde{\varphi}_{\lambda\mu}-\dfrac{1}{2}\eta_{\lambda\mu}\tilde{\varphi}^{\nu}{}_{\nu}\right)$ を用いて $\boldsymbol{L}_0$ は

$$\boldsymbol{L}_0{}^{\text{effect}}=-\frac{1}{2}\Bigg[\partial_\lambda\tilde{\varphi}^{\mu\nu}\partial^\lambda\tilde{\varphi}_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{2\alpha}\right)\partial_\lambda\tilde{\varphi}^{\nu}{}_{\nu}\partial^\lambda\tilde{\varphi}^{\mu}{}_{\mu}-2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial_\mu\tilde{\varphi}^{\mu\lambda}\partial^\nu\tilde{\varphi}_{\nu\lambda}$$

$$+2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\partial^\mu\tilde{\varphi}_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\varphi}^{\lambda}{}_{\lambda}\Bigg] \tag{8-59'}$$

と表わされる．上式でFPゴースト項は落としたが，ゴーストは重力場 $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ とは(8-22)の $\boldsymbol{L}_{\text{int}}^{\text{FP}}$ を通して相互作用をし，摂動展開における S 行列のユニタリティを保証する．また(8-59′)の $\boldsymbol{L}_0{}^{\text{effect}}$ は $\alpha\neq0$ の場合にのみ適用できて，$\alpha=0$ の de Donder のゲージ条件のときには，もとの(8-59)を用いなければならぬことはいうまでもない．

§8-3　摂動展開によるS行列

量子重力から得られる重力ポテンシャルと古典重力によって得られた前章までの結果とを比較するため，背景空間としてMinkowski空間をとり摂動展開によって S 行列を求めよう．

物質場としては質量 m_a，波動関数 ϕ_a の N 個の中性スカラー場をとろう．重力場については，$\varkappa$ の最低次で成り立っていた関係を拡張して

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\varkappa\varphi_{\mu\nu}\ ;\ \varkappa^2=32\pi G \tag{8-60}$$

とおき，$\varphi_{\mu\nu}$ を重力場の変数とする*)．上の式では何も近似は行われていない．$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}=\delta^{\mu}{}_{\lambda}$ を満たす $g^{\mu\nu}$ は(5-6)において $h_{\alpha\beta}=\chi\varphi_{\alpha\beta}$ とおけば $\varphi_{\alpha\beta}$ で表わされる．$R_{\mu\nu}$ についても付録 A-1 で $h_{\alpha\beta}=\chi\varphi_{\alpha\beta}$ とおくことにより $\varphi_{\alpha\beta}$ で書き表わされる．ここでゲージとして

$$\alpha=1$$

の Feynman ゲージをとると(8-58)の交換関係が簡単になる．Lagrange 未定乗数場 B_μ を消去した次の Lagrange 関数から出発しよう($,\sigma$ は $\partial/\partial x^\sigma$ を意味する)．

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_0{}^{\mathrm{G}}+\boldsymbol{L}_0{}^{\mathrm{M}}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{int}}, \tag{8-61}$$

ただし

$$\boldsymbol{L}_0{}^{\mathrm{G}}=-\frac{1}{2}\varphi_{\beta\gamma,\alpha}\varphi^{\beta\gamma,\alpha}+\frac{1}{4}\varphi^{\alpha}{}_{\alpha,\mu}\varphi^{\beta}{}_{\beta}{}^{,\mu}-i\bar{c}_{\nu,\mu}c^{\nu,\mu} \tag{8-61 a}$$

$$\boldsymbol{L}_0{}^{\mathrm{M}}=-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}(\phi_{a,\mu}\phi_a{}^{,\mu}+m_a{}^2\phi_a{}^2) \tag{8-61 b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{\mathrm{int}}=\frac{\chi}{2}\Big\{&-\frac{1}{2}\varphi_{\beta\gamma,\alpha}\varphi^{\beta\gamma,\alpha}+\frac{1}{2}\varphi^{\beta}{}_{\beta,\gamma}\varphi^{\alpha}{}_{\alpha}{}^{,\gamma}+\varphi_{\beta\gamma,\alpha}\varphi^{\alpha\gamma,\beta}-\varphi^{\alpha\beta}{}_{,\alpha}\varphi^{\gamma}{}_{\gamma,\beta}\Big\}\Big\{\varphi^{\alpha}{}_{\alpha}+\frac{\chi}{4}(\varphi^{\alpha}{}_{\alpha}\varphi^{\beta}{}_{\beta}\\
&-2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta})\Big\}+\chi\Big\{\frac{1}{2}\varphi_{\gamma\delta,\alpha}\varphi^{\gamma\delta}{}_{,\beta}-\frac{1}{2}\varphi^{\gamma}{}_{\gamma,\alpha}\varphi^{\delta}{}_{\delta,\beta}-\varphi_{\alpha\delta,\gamma}\varphi_{\beta}{}^{\gamma,\delta}+\varphi^{\gamma\delta}{}_{,\gamma}\varphi_{\alpha\beta,\delta}+\varphi_{\alpha\delta,\gamma}\varphi_{\beta}{}^{\delta,\gamma}\\
&-\varphi_{\alpha\beta,\gamma}\varphi^{\delta}{}_{\delta}{}^{,\gamma}+\varphi_{\beta\gamma,\alpha}\varphi^{\delta}{}_{\delta,}{}^{,\gamma}+\varphi^{\delta}{}_{\delta,\alpha}\varphi_{\beta\gamma}{}^{,\gamma}-2\varphi_{\gamma\delta,\alpha}\varphi_{\beta}{}^{\delta,\gamma}\Big\}\Big(\varphi^{\alpha\beta}-\chi\varphi^{\alpha\gamma}\varphi^{\beta}{}_{\gamma}+\frac{\chi}{2}\varphi^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma}{}_{\gamma}\Big)\\
&-\chi^2\varphi^{\alpha\beta}\varphi^{\gamma\delta}(-\varphi_{\gamma\rho,\alpha}\varphi^{\rho}{}_{\delta,\beta}+\varphi_{\gamma\delta,\alpha}\varphi^{\rho}{}_{\rho,\beta}+\varphi_{\delta\rho,\alpha}\varphi^{\rho}{}_{\beta,\gamma}-\varphi_{\beta\delta,\alpha}\varphi^{\rho}{}_{\rho,\gamma}-\varphi_{\beta\rho,\alpha}\varphi_{\gamma\delta}{}^{,\rho}\\
&-\varphi_{\alpha\beta,\gamma}\varphi_{\delta\rho}{}^{,\rho}+2\varphi_{\alpha\rho,\gamma}\varphi_{\beta\delta}{}^{,\rho}-\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\gamma,\rho}\varphi_{\beta\delta}{}^{,\rho}+\frac{1}{2}\varphi_{\alpha\beta,\rho}\varphi_{\gamma\delta}{}^{,\rho}\Big)\\
&+\frac{\chi}{2}\sum_{a}\Big\{\phi_{a,\mu}\phi_{a,\nu}\varphi^{\mu\nu}-\frac{1}{2}(\phi_{a,\alpha}\phi_a{}^{,\alpha}+m_a{}^2\phi_a{}^2)\varphi^{\alpha}{}_{\alpha}\Big\}+\frac{\chi^2}{4}\sum_{a}[\phi_{a,\mu}\phi_{a,\nu}(\varphi^{\mu\nu}\varphi^{\gamma}{}_{\gamma}\\
&-2\varphi^{\mu\alpha}\varphi^{\nu}{}_{\alpha})-\frac{1}{4}(\phi_{a,\mu}\phi_a{}^{,\mu}+m_a{}^2\phi_a{}^2)\{(\varphi^{\alpha}{}_{\alpha})^2-2\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}\}]\\
&+\frac{\chi^3}{16}\sum_{a}[\phi_{a,\mu}\phi_{a,\nu}\{\varphi^{\mu\nu}(\varphi^{\alpha}{}_{\alpha}\varphi^{\beta}{}_{\beta}-2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta})-4\varphi^{\mu}{}_{\gamma}\varphi^{\nu\gamma}\varphi^{\delta}{}_{\delta}+8\varphi^{\mu\gamma}\varphi^{\nu\delta}\varphi_{\gamma\delta}\}\end{aligned}$$

---

*）これは §8-2の $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ と最低次の近似では同じものである．

$$-\frac{1}{6}(\phi_{a,\mu}\phi_a{}^{,\mu}+m_a{}^2\phi_a{}^2)(8\varphi^\gamma{}_\alpha\varphi_{\beta\gamma}\varphi^{\alpha\beta}-6\varphi_{\alpha\gamma}\varphi^{\alpha\gamma}\varphi^\delta{}_\delta+\varphi^\alpha{}_\alpha\varphi^\beta{}_\beta\varphi^\gamma{}_\gamma)]$$

$$+L_{\rm int}^{\rm FP}+\cdots. \tag{8-61 c}$$

(8-61 b) および (8-61 c) 中のスカラー場を含む項は Lagrange 関数

$$L_{\rm M}=-\frac{1}{2}\sum_a\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\phi_{a,\mu}\phi_{a,\nu}+m_a{}^2\phi_a{}^2)$$

を $\varphi_{\mu\nu}$ で展開することによって得られる．また (8-61 c) では重力場自身の相互作用については $\varkappa^2$ まで，スカラー場と重力場の相互作用については $\varkappa^3$ の項まで取り出した*)

さらに $L_{\rm int}^{\rm FP}$ は(8-22)で与えたもので

$$L_{\rm int}^{\rm FP}=i\varkappa\bar{c}_{\nu,\mu}\{\varphi^{\mu\sigma}c^\nu{}_{,\sigma}+\varphi^{\sigma\nu}c^\mu{}_{,\sigma}-(\varphi^{\mu\nu}c^\rho)_{,\rho}\}-\frac{i\varkappa}{2}\varphi^\alpha{}_\alpha\bar{c}_{\nu,\mu}(c^{\nu,\mu}+c^{\mu,\nu})$$

$$+\frac{i\varkappa}{2}\bar{c}^\nu{}_{,\nu}(\varphi^\alpha{}_\alpha c^\mu)_{,\mu}+O(\varkappa^2) \tag{8-61 d}$$

である．ここではわれわれの直接の目的には用いないため $\varkappa^2$ 以上の項は省略した．

$L_0{}^{\rm G}$ を重力場と FP ゴースト場，$L_0{}^{\rm M}$ をスカラー場の自由場を記述する Lagrange 関数，$L_{\rm int}$ を相互作用 Lagrange 関数とすると，量子論における S 行列は次の式で与えられる．

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d^4x_n{\rm T}(L_{\rm int}(x_1)\cdots L_{\rm int}(x_n)), \tag{8-62}$$

ただし T は**時間順序積**である．実際に求めるものは，この S を状態 $\langle b|$, $|a\rangle$ ではさんだ $\langle b|S|a\rangle$ である．この行列要素を計算するときに，以下の式で定義される各々の場の伝播関数が必要になる．まず，T 積は次の関係式をもつことに注意しよう．すなわち，

$$\begin{aligned}{\rm T}(A(x)B(y))&=\theta(x^0-y^0)A(x)B(y)\pm\theta(y^0-x^0)B(y)A(x)\\&=\frac{1}{2}\varepsilon(x^0-y^0)[A(x),B(y)]_\mp+\frac{1}{2}[A(x),B(y)]_\pm,\end{aligned}$$

---

*) スカラー場 ϕ_a の BRST 変換は $\delta_{\rm B}\phi_a=\varkappa\lambda c^\mu\partial_\mu\phi_a$ で与えられ $\delta_{\rm B}L_{\rm M}=-\partial_\mu(\varkappa\lambda c^\mu L_{\rm M})$ となる．したがって，$L_{\rm M}$ を加えた全作用関数も BRST 変換のもとで不変である．

$$(\theta(x^0)=1/2\cdot(1+\varepsilon(x^0)).$$

ここで第1式の±の符号のうち−は，A，Bが共にFermi場のときであり，第2式の$[\quad]_-$は交換子，$[\quad]_+$は反交換子を表わす．この関係式をスカラー場$\phi(x)$に当てはめる．真空状態$|0\rangle$ではさんだ，スカラー粒子の伝播関数として

$$\langle 0|\mathrm{T}(\phi_a(x)\phi_b(y))|0\rangle=\frac{1}{2}\delta_{ab}\Delta_{\mathrm{F}}(x-y,m_a)$$

$$=\frac{1}{2}\delta_{ab}[i\varepsilon(x^0-y^0)\Delta(x-y,m_a)+\Delta^{(1)}(x-y,m_a)].$$

ただし

$$\Delta(x,m)=-\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4ke^{ik_\mu x^\mu}\delta(k^2+m^2)\varepsilon(k^0)$$

$$\Delta^{(1)}(x,m)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4ke^{ik_\mu x^\mu}\delta(k^2+m^2)$$

$$\frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{F}}(x,m)=-\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon}e^{ik_\mu x^\mu}$$

の関係を用いて

$$\langle 0|\mathrm{T}(\phi_a(x)\phi_b(y))|0\rangle=\delta_{ab}\frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4pe^{ip_\mu(x-y)^\mu}\frac{1}{p^2+m_a{}^2-i\varepsilon}\tag{8-63}$$

を得る．同様にして Feynman ゲージでの重力子の伝播関数として次式を得る．

$$\langle 0|\mathrm{T}(\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\gamma\delta}(y))|0\rangle=-\frac{i}{2(2\pi)^4}\int d^4ke^{ik_\mu(x-y)^\mu}\frac{X^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}(k)}{k^2-i\varepsilon}.\tag{8-64}$$

ここに

$$X^{\mathrm{F}}_{\alpha\beta,\gamma\delta}=\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}+\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}-\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}.\tag{8-64'}$$

また，FP ゴーストに対しては，(8-41 d)から

$$\langle 0|\mathrm{T}(c_\mu(x)\bar{c}_\nu(y))|0\rangle=-i\eta_{\mu\nu}\int d^4k\frac{1}{k^2-i\varepsilon}e^{ik_\mu(x-y)^\mu}\tag{8-65}$$

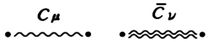
と表わされる．

S行列の行列要素の計算はFeynman図を書いて，運動量表示で行われる．

(i) **内　線**

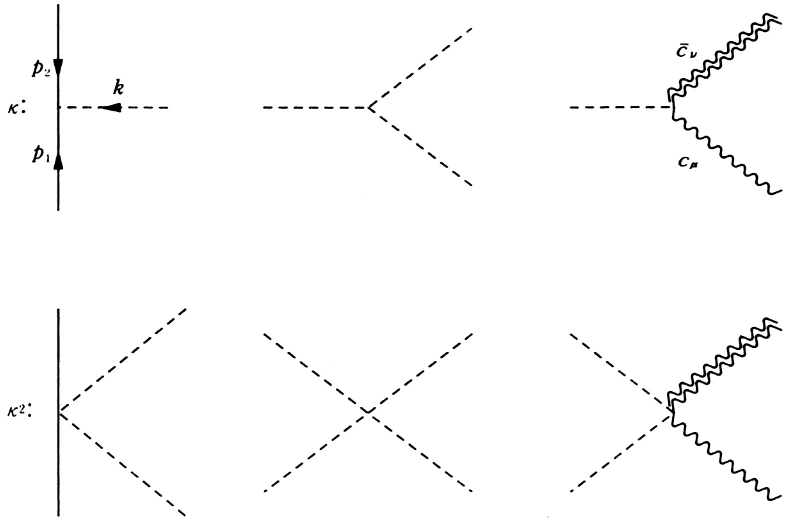
スカラー粒子：•———• と実線で表わし，$\dfrac{-i}{(2\pi)^4}\dfrac{1}{p^2+m^2-i\varepsilon}$

重力子：　　と点線で表わし，$\dfrac{1}{2}\dfrac{-i}{(2\pi)^4}\dfrac{(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}+\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}-\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta})}{k^2-i\varepsilon}$

FP ゴースト：

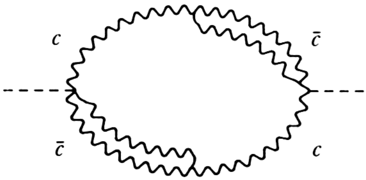
波線，2 重波線で表わす

（ii）**頂　点**



（iii）**数係数**：スカラー粒子の外線に対しては，$(2\pi)^{-3/2}/\sqrt{2(\boldsymbol{p}^2+m^2)}$；重力場 $\varphi_{\mu\nu}$ の外場については $(2\pi)^{-3/2}/\sqrt{2|\boldsymbol{k}|}$．各頂点には相互作用定数に $(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2+k)$ 等の保存則を表現する係数をつける．n 次摂動では $(i)^n$ をつけ，ゴーストのループには (-1) を掛ける．

FP ゴーストのループとして下の図のようなものがある．



ゴーストループ図

このグラフは，重力場のみからなるに現われるS行列のユニタリティやゲージ不変性の破れを補正する．実際の計算は複雑なので省略するが，FP ゴーストを，BRST 変換不変性によって§8-2 で導入した方法から，このような補正の効果が得られることは理解されよう．

FP ゴーストがS行列のユニタリティの回復に役立つことはわかったが，量子重力に現われる最大の困難であるS行列の行列要素の発散の除去には役立たない．これは，重力に比べて，FP ゴーストの相互作用は FP ゴーストを必ず 2 次でのみ含むためである．

(8-3)式の脚注で示したように，相互作用定数κは長さの次元$[L]$について 1 次である．よく知られているように相互作用定数gが$[L]_{\eta_g}$，$\eta_g \geq 1$のときは理論はくりこみ可能ではない．実際，スカラー粒子がなくて重力のみの場合で考えて見よう．内線の数をI_i，m本の枝を持った頂点の数を$V_m (m \geq 3)$とする．頂点には必ず微分が 2 回入っていることを考慮すると，紫外発散の次数は

$$D = -2I_i + 2\sum_m V_m + 4N$$

である．ただしNは独立な運動量積分の数である．各頂点に 4 次元運動量の保存則が働いていることを考えると$N = I_i - \sum_m V_m + 1$であり

$$D = 2(N+1), \quad N \geq 1 \qquad (8\text{-}66)$$

となる．これは摂動の次数が高くなればなる程発散の次数が高くなり，次々に新しい型の引算項を導入しなければならないことを示している．

この困難を除くため，重力場の相互作用項は重力場の変数について，いくらでも高い多項式となることに注目をする．2 点間に重力場の内線が何本でもとれることになるので，これらを最初に足し上げて，解析接続の方法で有限な値を得ようとする試みがあるが，すべての人に受け入れられてはいない．また，Bose 場と Fermi 場との間に超対称性を仮定し，重力子とスピン 3/2 の粒子との混合場を考えて，一部の発散項の除去には成功しているが，他の発散項にはこの方法，いわゆる超重力理論も無力である．現在，有望なものとしては，弦理論や超弦理論が挙げられている．

われわれが量子重力を試みる目的の 2 番目は，量子論的S行列から得られる重力ポテンシャルが$\hbar \to 0$で，古典論で得られたものと一致するかどうかであった．Feynman 図にループが現れるときは，必ず$\hbar$がつくので，$\hbar \to 0$の極限を考えれば，ループからの寄与は無視できる．したがって，いわゆる tree 図のみからポテ

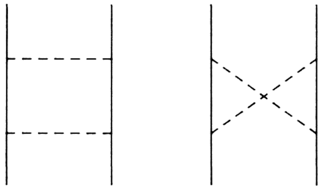


図 8-1

ンシャルを求めればよいことになる.

しかし，次のような異論が出るかもしれない. 2体間に図8-1のように2重力子を交換する Feynman 図のS行列から静的な重力ポテンシャルとして，$\hbar\to 0$ で

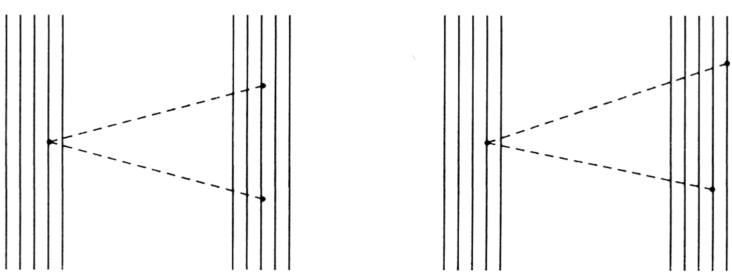
$$V_2=\frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2{r_{12}}^2} \tag{8-67 a}$$

が存在するではないか. しかし，このポテンシャルは，3体の tree の図から3体静的重力ポテンシャル

$$V_3=\frac{G^2}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_am_bm_c}{r_{ab}r_{ac}} \tag{8-67 b}$$

を求め，a，b，cがすべて1か2なら，$a=1$，$b=c=2$ あるいは$a=2$，$b=c=1$とすれば得られるので，われわれは tree 図のみ計算すればよい. これは次の事実とも関連する.

今，天体を莫大な数N個の素粒子の集りと考えよう. 2つの天体A，Bに図8-2のように相互作用が働く.



(a)　　(b)

図 8-2

(8-67 a)のような力が働く場合が(a)で，(8-67 b)の場合が(b)である．後者では b，c が独立にN個の素粒子に働くので，$M_1=N_1 m$，$M_2=N_2 m$ とすると

$$\overline{V_3} \simeq \frac{G^2 M_1 M_2 (M_1+M_2)}{2r^2}. \tag{8-68}$$

これは(8-67 a)の m_a を M_a で置き換えたそのものである．これに反し，(8-67 a)からは

$$\overline{V_2} \simeq \frac{G^2 M_1 M_2 m}{r^2}$$

となり，$\overline{V_2}/\overline{V_3} \simeq 2m/(M_1+M_2) \sim 1/N$ である．r は2天体間の平均距離である．したがって，古典論での G^2 2体ポテンシャルを得るには，(8-67 b)のような3体の tree 図からS行列を計算して求めるべきである．

以上から，古典論との対応を見るためには，ループ図は考えなくてよい．よって FP ゴーストからのポテンシャルへの寄与も計算する必要はないことがわかった．

§8-4　S行列とポテンシャル

Feynman 図から計算されたS行列の行列要素から多体粒子間のポテンシャルを求める場合，次の点に注意しなければならない．まず，運動量表示でのS行列要素から，Fourier 変換によってポテンシャルを導く際に，交換粒子の伝播関数の分母に現われるエネルギーを外線の運動量で表わさねばならないが，その表わし方に不定性が伴う．次に高次ポテンシャルを求めるにあたって，低次ポテンシャルの繰り返しの項を差し引く必要がある場合，Fourier 変換での不定性を含め，一貫した引き算の手法で各次数のポテンシャルを定めていかねばならない．以下，これらの点について述べる．

ポテンシャルVをもつ系の全 Hamilton 関数Hは，無摂動系の Hamilton 関数 H_0 と

$$H = H_0 + V$$

で結ばれている．量子力学によれば，S行列は摂動展開により

$$\langle b|S|a\rangle = \delta_{ba} - 2\pi i\delta(E_a-E_b)\left\{\langle b|V|a\rangle + \sum_m \frac{\langle b|V|m\rangle\langle m|V|a\rangle}{E_a-E_m+i\varepsilon} + \cdots\right\} \tag{8-69}$$

で与えられる．$|a\rangle$，$|b\rangle$ は固有値が E_a，E_b の H_0 の固有状態である．

一方，Feynman 図による S 行列要素が次の形

$$\langle b|S|a\rangle = \delta_{ab} - 2\pi i\delta(E_a - E_b)\langle b|T|a\rangle \tag{8-70}$$

で求められたとする．量子力学におけるポテンシャル V は(8-69)と(8-70)が等しくなるように定めるべきである．すなわち，V を定めるには

$$\langle b|T|a\rangle = \langle b|V|a\rangle + \sum_m \frac{\langle b|V|m\rangle\langle m|V|a\rangle}{E_a - E_m + i\varepsilon} + \cdots, \qquad E_b = E_a \tag{8-71}$$

を解けばよい．V と T を摂動展開のパラメータ g（重力では $G = \varkappa^2/32\pi$）で展開し

$$V = \sum_n g^n V(n), \quad T = \sum_n g^n T(n) \tag{8-72}$$

とする．(8-71)は

$$\langle b|T(1)|a\rangle = \langle b|V(1)|a\rangle \tag{8-73a}$$

$$\langle b|T(2)|a\rangle = \langle b|V(2)|a\rangle + \sum_m \frac{\langle b|V(1)|m\rangle\langle m|V(1)|a\rangle}{E_a - E_m + i\varepsilon} \tag{8-73b}$$

$$\begin{aligned}\langle b|T(3)|a\rangle = \langle b|V(3)|a\rangle &+ \sum_m \frac{\langle b|V(1)|m\rangle\langle m|V(2)|a\rangle}{E_a - E_m + i\varepsilon} \\ &+ \sum_m \frac{\langle b|V(2)|m\rangle\langle m|V(1)|a\rangle}{E_a - E_m + i\varepsilon} \\ &+ \sum_{l,m} \frac{\langle b|V(1)|l\rangle\langle l|V(1)|m\rangle\langle m|V(1)|a\rangle}{(E_a - E_l + i\varepsilon)(E_a - E_m + i\varepsilon)}\end{aligned} \tag{8-73c}$$

....

最低次のポテンシャル $V(1)$ は(8-73a)から Fourier 変換によって求められる．(8-73a)の左辺の T 行列は $E_a = E_b$ で与えられているが，Fourier 変換するためには $E_a \neq E_b$ での T 行列が必要である．$E_a = E_b$ で(8-73a)と一致するような

$V(1)$は無数に可能である．しかしgのオーダーまでのS行列はすべて等しい．$V(2)$は(8-73b)から定まるが，右辺第二項に$E_a \neq E_m$，$E_b \neq E_m$があり，これは先に定めた$V(1)$の選び方に関係する．始めに定めた$V(1)$の取り方によって，$E_a=E_b$での行列要素$\langle b|V(2)|a\rangle$が定まる．これを$E_a \neq E_b$に拡張してFourier変換で$V(2)$が求められる．$E_a=E_b$で(8-73b)を満たす$V(2)$も無数にあるが，S行列はg^2まででは，どれも同じS行列を与える．$V(3)$以下同様に定めていく．$V(n-1)$まで定めてあると，$E_a=E_b$の$\langle b|V(n)|a\rangle$が定まり，$E_a \neq E_b$に拡張してFourier変換で$V(n)$を定めるときの不定性はg^nまでのS行列には効かない．重要なことは，$V(1)$，$V(2)$，…，$V(n-1)$を低次のものから一度定めたら，これを終始首尾一貫して用いなければ，整合性のある$V(n)$が得られない点である．

上で述べた点を明らかにするため，荷電スカラー粒子が電磁相互作用している系を考える．この系をとりあげた理由は，模型が簡単であることのほかに，通常3体の静的電気ポテンシャルは存在しないと考えられているが，ポテンシャルを求めるとき，$E_a \neq E_b$への拡張の仕方では3体の静的ポテンシャルが現われることを示すためである．Lagrange関数として

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\sum_a(\partial_\mu\phi_a^*\partial^\mu\phi_a+m_a{}^2\phi_a^*\phi_a)$$

$$+\sum_a\{ie_a(\partial_\mu\phi_a^*\cdot\phi_a-\phi_a^*\partial_\mu\phi_a)A^\mu-e_a{}^2\phi_a^*\phi_aA_\mu A^\mu\} \tag{8-74}$$

から出発する．

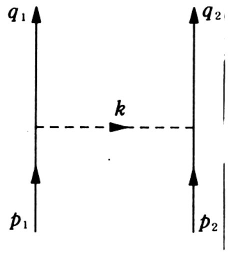


図 8-3

図8-3のようなFeynman図から得られるT行列(運動量保存則からの$\delta^3(\cdots)$は

除いてある)は，Feynman ゲージで

$$\langle q_1, q_2 | T | p_1, p_2 \rangle = -\frac{e_1 e_2}{32\pi^3} \frac{1}{\sqrt{p_1{}^0 p_2{}^0 q_1{}^0 q_2{}^0}} \frac{(p_1+q_1)_\mu (p_2+q_2)^\mu}{\boldsymbol{k}^2 - k_0{}^2} \tag{8-75}$$

と書かれる．ただし(8-75)の k_0 は次式で与えられる．

$$k_0 = p_{10} - q_{10} = -(p_{20} - q_{20}). \tag{8-76}$$

ポテンシャルは(8-75)の $T(\boldsymbol{k})$ を Fourier 変換

$$V(r) = \int d^3k T(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

することによって求められる．そのためには T を $E_a \neq E_b$ の場合へ拡張しなければならない．たとえば，$p_1{}^0 = \sqrt{m_1{}^2 + \boldsymbol{p}_1{}^2}$ 等とすれば，$E_a \neq E_b$ では(8-76)は $p_{10} - q_{10} \neq -(p_{20} - q_{20})$ となる．このことから $E_a \neq E_b$ への簡単な拡張として，λ_0 を実数パラメータとし

$$k_0{}^2 = \frac{\lambda_0}{2}\{(p_1{}^0 - q_1{}^0)^2 + (p_2{}^0 - q_2{}^0)^2\} - (1-\lambda_0)(p_1{}^0 - q_1{}^0)(q_2{}^0 - p_2{}^0) \tag{8-77}$$

が考えられる．ここで $p_a{}^0 = \sqrt{m_a{}^2 + \boldsymbol{p}_a{}^2}$，$q_a{}^0 = \sqrt{m_a{}^2 + \boldsymbol{q}_a{}^2}$ $(a = 1, 2)$．(8-77)の k_0 は，$E_a = E_b$ では(8-76)の k_0 となる．

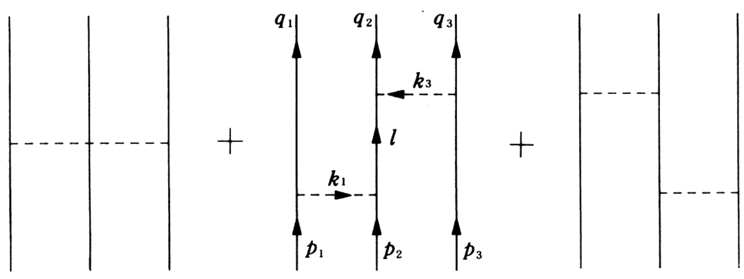


図 8-4

---

*)積分公式として，

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\boldsymbol{k}^2} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3k = \frac{1}{4\pi r}\ ;\ \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{k_i k_j}{(\boldsymbol{k}^2)^2} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3k = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{2r}\left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{r^2}\right)$$

を用いる．

(8-77)式を(8-75)に代入すると，$1/c^2$ の近似で次のポテンシャルを得る*).

$$V_1=\frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\}\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda_0}{4}\{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2-[(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n}]^2\}\right]. \tag{8-78}$$

ここで $\boldsymbol{v}_a=(\boldsymbol{p}_a+\boldsymbol{q}_a)/2m_a \quad (a=1,2)$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$.

われわれの処方に従って，$(e_1e_2/4\pi)^2$ の2体の静的ポテンシャルを得るために，3体の静的ポテンシャルを求める．これは図8-4の Feynman 図からの寄与として得られる．この図に対応する T 行列は

$$T=\frac{F(l^0)}{[\boldsymbol{k}_1{}^2+(p_1{}^0-q_1{}^0)(p_2{}^0-E)][(\boldsymbol{k}_3{}^2+(q_3{}^0-p_3{}^0)(q_2{}^0-E)](l^0-E)(l^0+E)} \tag{8-79}$$

で与えられる．ここで $E=(m_2{}^2+\boldsymbol{l}^2)^{1/2}$ で，$F(l^0)$ は頂点関数の積である．e^4-ポテンシャルは(8-73 b)によって，(8-79)の T から(8-73 b)の右辺第2項を引き去って得られる．この引き算項の $\langle b|V(1)|m\rangle$，$\langle m|V(1)|a\rangle$ は $E_b\neq E_m$，$E_m\neq E_a$ における行列要素である．理論の整合性から，これらは，(8-78)を得るためにおいた拡張法(8-77)によらなければならない．よって引き算項 T' として

$$T'=\frac{F(E)}{(\boldsymbol{k}_1{}^2-w_1{}^2)(\boldsymbol{k}_3{}^2-w_3{}^2)2E(l^0-E)} \tag{8-80}$$

ここで

$$w_1{}^2=\frac{\lambda_0}{2}\{(p_1{}^0-q_1{}^0)^2+(p_2{}^0-E)^2\}-(1-\lambda_0)(p_1{}^0-q_1{}^0)(p_2{}^0-E),$$
$$w_3{}^2=\frac{\lambda_0}{2}\{(q_3{}^0-p_3{}^0)^2+(q_2{}^0-E)^2\}-(1-\lambda_0)(q_3{}^0-p_3{}^0)(q_2{}^0-E). \tag{8-80'}$$

通常は $\lambda_0=0$ としたものを引き算項にしている．この場合は(図8-4の第1番目のものは，引き算の必要はない)，T-T' からの3体静的ポテンシャルへの寄与は0となる．(8-78)の V_1 に対応するものを得るには，T-T' から λ_0 についての1次の項をとり出さねばならない．その際には，$F(E)=F(l^0)=F$ とおけるので $w_1{}^2$ と $w_3{}^2$ についての1次の項を引き出せばよい．すなわち，

$$T-T'=\frac{-F}{2m_2\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2(l^0-E)}\left[\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2}\{w_1{}^2+(p_1{}^0-q_1{}^0)(p_2{}^0-E)\}\right.$$

$$+\frac{1}{\boldsymbol{k}_3{}^2}\{w_3{}^2+(q_3{}^0-p_3{}^0)(q_2{}^0-E)\}\Big]. \qquad (8\text{-}81)$$

ここで(8-80′)を用いると

$$T-T'=\frac{F}{2m_2\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}\frac{\lambda_0}{2}(E-l^0)\left(\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2}+\frac{1}{\boldsymbol{k}_3{}^2}\right)=-\frac{F}{8m_2{}^2}\lambda_0\frac{(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_3)}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}\left(\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2}+\frac{1}{\boldsymbol{k}_3{}^2}\right) \qquad (8\text{-}81')$$

を得る．これを導く際に，$E-l^0\approx(1/2)\boldsymbol{l}^2/m_2$，$\boldsymbol{l}=(\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{p}_2)=(-\boldsymbol{k}_3+\boldsymbol{q}_2)$を考慮し，静的ポテンシャルを求めているので粒子の運動量依存性を無視した．e_1, e_2, e_3を入れ替えた図からの寄与も含めて，3体静的ポテンシャルとして

$$V_2(\lambda_0)=\frac{\lambda_0}{4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{e_a{}^2}{4\pi}\frac{e_be_c}{4\pi}\frac{1}{m_a}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})/r_{ac}{}^2 \qquad (8\text{-}82)$$

を得る．

2体のe^4-静的ポテンシャルは(8-82)で$b=c$とおくことによって得られる．結局，荷電2粒子間のポテンシャルとして，(8-78)，(8-82)から

$$V=V_1+V_2(\lambda_0)=\frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\}\right]$$

$$+\frac{\lambda_0}{4}\frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{1}{r}\left[(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2-\{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{n}\}^2+\frac{(e_1e_2)}{4\pi}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{1}{r}\right] \qquad (8\text{-}83)$$

を得る*)．$\lambda_0=0$なら$V_2(\lambda_0)=0$でCoulombゲージで計算したものと同じである．これは，Coulombゲージでは，伝播関数の分母の$k_0{}^2$の問題が起きないので$E_a\neq E_b$へT行列が素直に拡張できるためである．$V_2(\lambda_0)$はS行列に対してこの近似においては寄与しない．これは(8-83)が次のように変形できることからもわかる．

$$V=\frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)+(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\}\right]+\frac{\lambda_0}{4}\frac{e_1e_2}{4\pi}\frac{d^2}{dt^2}r$$

$$-\frac{\lambda_0}{4}\frac{e_1e_2}{4\pi}\sum_a\sum_{b\neq a}\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\left(\boldsymbol{\alpha}_a-\frac{e_ae_b}{4\pi m_a}\frac{\boldsymbol{n}_{ab}}{r_{ab}{}^2}\right). \qquad (8\text{-}83')$$

Lagrange形式で考えると，運動方程式により0となる項を除いて，λ_0依存項は

---

*）もちろん，図8-1型のFeynman図から一般のゲージにおけるS行列を計算する方法によっても同一のポテンシャルが得られる．

時間についての全微分項になっているのでS行列には寄与しないのである．

重力の場合も，全くこれに平行して求めることができて，結果は§5-3の(5-148)のy依存項において

$$y=\frac{\lambda_0}{2} \tag{8-84}$$

と置いたものである．(§8-6で少し異なった方法で詳しく計算する)

4体ポテンシャルを求める場合は，引き算が複雑になる．λ_0依存項の存在のため現われたポテンシャルの不定性は，伝播関数の分母の$k_0{}^2$の表現方法の不定性に由来した．したがって，伝播関数にk_0がなるべく現われないようにして出発した方が高次の近似をする場合には便利であろう．次節では，ゲージ変換を用いて，このことを試みよう．

§8-5 ゲージ変換による伝播関数の変形

重力子を表わす$\varphi_{\alpha\beta}$はゲージ変換(一般座標変換)

$$\varphi_{\alpha\beta}\longrightarrow\varphi_{\alpha\beta}+\partial_\alpha\varepsilon_\beta+\partial_\beta\varepsilon_\alpha \tag{8-85}$$

を受ける．これに伴って，伝播関数も変換される．しかし，S行列のような物理的観測量は，この変換に対して不変でなければならない．このためには，重力場の源となる物質場のエネルギー・運動量テンソル$T^{\alpha\beta}$が

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}=0 \tag{8-86}$$

を満たさなければならない(もちろん，線形近似における条件である)．(8-86)を用いて，1-重力子交換のT行列

$$T=\frac{1}{k^2}T^{\alpha\beta}(1)(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}+\eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}-\eta_{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta})T^{\gamma\delta}(2) \tag{8-87}$$

を変形しよう．ここで，$T^{\alpha\beta}(a)$，$(a=1,2)$は粒子aのエネルギー・運動量テンソルである．(8-87)を次式のように書き直す．

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{k^2}\{2T^{\alpha\beta}(1)T_{\alpha\beta}(2)-T^{\alpha}{}_{\alpha}(1)T^{\beta}{}_{\beta}(2)\}\\&=\frac{1}{k^2}\{T^{00}(1)T^{00}(2)-4T^{0k}(1)T^{0}{}_{k}(2)+4T^{3k}(1)T^{3}{}_{k}(2)\\&\quad+T^{00}(1)T^{k}{}_{k}(2)+T^{k}{}_{k}(1)T^{00}(2)-T^{33}(1)T^{k}{}_{k}(2)\end{aligned}$$

$$-T^k{}_k(1)T^{33}(2)-T^{33}(1)T^{33}(2)+2T^{st}(1)T_{st}(2)$$

$$-T^s{}_s(1)T^t{}_t(2)\}. \qquad (8\text{-}87')$$

ただし，$k=1,2,3$；$s,t=1,2$．

便宜上，$k_a=(k_0,0,0,k_3)$となるような座標系をとり，(8-86) を運動量表示で書くと次式を得る．

$$T^{3a}(a)=-\frac{k_0}{k_3}T^{0a}(a),\quad a=1,2. \qquad (8\text{-}86')$$

(8-87′)は，

$$T=\frac{1}{k^2}\frac{(k_3{}^2-k_0{}^2)}{k_3{}^2}\Big\{T^{00}(1)T^{00}(2)-4T^{0k}(1)T^0{}_k(2)+T^{00}(1)T^k{}_k(2)+T^k{}_k(1)T^{00}(2)\Big\}$$

$$+\frac{1}{k^2}\Big\{\frac{k_0{}^2}{k_3{}^2}T^{00}(1)T^{00}(2)-T^{33}(1)T^{33}(2)\Big\}+\frac{1}{k^2}\Big\{2T^{st}(1)T_{st}(2)-T^s{}_s(1)T^t{}_t(2)\Big\}.$$

$$(8\text{-}87'')$$

この右辺第2項を T_2 とすると，(8-86′)を用いて

$$T_2=\frac{1}{k^2}\frac{(k_3{}^2-k_0{}^2)}{k_3{}^2}T^{03}(1)T^{03}(2) \qquad (8\text{-}88)$$

と書ける．ここで再び(8-86′)を用いると関係式

$$T^{03}(1)T^{03}(2)=\frac{1}{2}\Big(T^{00}(1)T^{33}(2)+T^{33}(1)T^{00}(2)\Big) \qquad (8\text{-}86'')$$

が成り立つ．これを考慮すると，実数値のパラメータ x を導入して，T_2 として

$$T_2=\frac{1}{k^2}\frac{(k_3{}^2-k_0{}^2)}{k_3{}^2}\Big\{(1-x)T^{03}(1)T^{03}(2)+\frac{x}{2}\Big(T^{00}(1)T^{33}(2)+T^{33}(1)T^{00}(2)\Big)\Big\}$$

ととることができる．よって

$$T=\frac{1}{k^2}\frac{(k_3{}^2-k_0{}^2)}{k_3{}^2}\Big\{T^{00}(1)T^{00}(2)+T^{00}(1)T^k{}_k(2)+T^k{}_k(1)T^0{}_0(2)$$

$$-4T^0{}_k(1)T^{0k}(2)+(1-x)T^{03}(1)T^{03}(2)+\frac{x}{2}\Big(T^{00}(1)T^{33}(2)$$

$$+T^{33}(1)T^{00}(2)\Big)\Big\}+\frac{1}{k^2}\Big\{2T^{st}(1)T_{st}(2)-T^s{}_s(1)T^t{}_t(2)\Big\}$$

$$(8\text{-}88)$$

となる．最後の項は，横波からの寄与である．保存則を用いて出した $k_3 T^{\alpha 3}$ は，一般の座標では $k_i T^{\alpha i}$ であり，$1/k_3{}^2$ は $1/\boldsymbol{k}^2$ であることを考えると，T は

$$T=\frac{1}{k^2}T^{\alpha\beta}(1)X_{\alpha\beta,\gamma\delta}T^{\gamma\delta}(2) \tag{8-89}$$

と書ける．ここで $X_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ は

$$\begin{aligned}
X_{\alpha\beta,\gamma\delta}(k)=\frac{k^2}{\boldsymbol{k}^2}\Big\{&\eta_{\alpha0}\eta_{\beta0}\eta_{\gamma0}\eta_{\delta0}-\eta_{\alpha0}\eta_{\beta0}\bar{\eta}_{\gamma\delta}-\bar{\eta}_{\alpha\beta}\eta_{\gamma0}\eta_{\delta0}+\eta_{\alpha0}\eta_{\gamma0}\bar{\eta}_{\beta\delta}+\eta_{\beta0}\eta_{\delta0}\bar{\eta}_{\alpha\gamma}\\
&+\eta_{\alpha0}\eta_{\delta0}\bar{\eta}_{\beta\gamma}+\eta_{\beta0}\eta_{\gamma0}\bar{\eta}_{\alpha\delta}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\Big[\frac{(1-x)}{4}\Big(\eta_{\alpha i}\eta_{\gamma j}\eta_{\beta0}\eta_{\delta0}+\eta_{\beta i}\eta_{\delta j}\eta_{\alpha0}\eta_{\gamma0}\\
&+\eta_{\alpha i}\eta_{\delta j}\eta_{\beta0}\eta_{\gamma0}+\eta_{\beta i}\eta_{\gamma j}\eta_{\alpha0}\eta_{\delta0}\Big)+\frac{x}{2}\Big(\eta_{\alpha i}\eta_{\beta j}\eta_{\gamma0}\eta_{\delta0}+\eta_{\gamma i}\eta_{\delta j}\eta_{\alpha0}\eta_{\beta0}\Big)\Big]\Big\}\\
&+\Big\{\Big(\bar{\eta}_{\alpha\gamma}-\eta_{\alpha i}\eta_{\gamma j}\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\Big)\Big(\bar{\eta}_{\beta\delta}-\eta_{\beta k}\eta_{\delta l}\frac{k_kk_l}{\boldsymbol{k}^2}\Big)+\Big(\bar{\eta}_{\alpha\delta}-\eta_{\alpha i}\eta_{\delta j}\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\Big)\\
&\times\Big(\bar{\eta}_{\beta\gamma}-\eta_{\beta k}\eta_{\gamma l}\frac{k_kk_l}{\boldsymbol{k}^2}\Big)-\Big(\bar{\eta}_{\alpha\beta}-\eta_{\alpha i}\eta_{\beta j}\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\Big)\Big(\bar{\eta}_{\gamma\delta}-\eta_{\gamma k}\eta_{\delta l}\frac{k_kk_l}{\boldsymbol{k}^2}\Big)\Big\},
\end{aligned} \tag{8-90}$$

そして $\bar{\eta}_{\alpha\beta}$ は

$$\bar{\eta}_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+\eta_{\alpha0}\eta_{\beta0}.$$

上の $X_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ を用いると，横波部分を除いて伝播関数 $X_{\alpha\beta,\gamma\delta}/k^2$ から $k^2=\boldsymbol{k}^2-k_0{}^2$ が消える．したがって伝播関数の分母の $k_0{}^2$ に起因した不定性は生じない．代りに重力子の伝播関数にゲージパラメータ x が導入された．これは§8-4での λ_0 と関係していることが，後にわかる．伝播関数の分母の $k_0{}^2$ に関する問題を考えずに3体，4体の重力ポテンシャルがS行列から計算される．結局，今後，重力子の伝播関数は，(8-64)，(8-64′)の代りに，(8-90)の $X_{\alpha\beta,\gamma\delta}(k)$ をとって，

$$\langle 0|\,T(\varphi_{\alpha\beta}(x)\varphi_{\gamma\delta}(y))|0\rangle=-\frac{i}{2(2\pi)^4}\int d^4k e^{ik_\mu(x-y)^\mu}\frac{X_{\alpha\beta,\gamma\delta}(k)}{k^2-i\varepsilon} \tag{8-91}$$

としたものを用いる．この伝播関数によって，ポスト-Newton (pN) 近似の重力ポテンシャルを最初に求めたのは緋田・岡村［4］である．次節でその概略を述べよう．

§ 8-6　ポスト-Newton (pN) 近似でのポテンシャル

この節では，(8-90)，(8-91) で与えた重力子の伝播関数を用いて，ポスト-Newton 近似での Gv^2，G^2 静的ポテンシャルを求めよう．

2 個のスカラー粒子間に1-重力子が交換する場合の S 行列は

$$S = \frac{iG}{\pi}(p_1{}^0 p_2{}^0 q_1{}^0 q_2{}^0)^{-1/2} p_1{}^\alpha q_1{}^\beta p_2{}^\gamma q_2{}^\delta \frac{X_{\alpha\beta,\gamma\delta}}{k^2}\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2) \tag{8-92}$$

$$\simeq \frac{iG}{\pi}\frac{m_1 m_2}{\boldsymbol{k}^2}\left[1+\frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{m_1{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{m_2{}^2}\right)-4\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1 m_2}+(1-x)\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{k})}{m_1 m_2 \boldsymbol{k}^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}x\frac{1}{\boldsymbol{k}^2}\left\{\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{k})^2}{m_1{}^2}+\frac{(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{k})^2}{m_2{}^2}\right\}\right]\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2), \tag{8-92$'$}$$

である．$S=-i(2\pi)T\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)$ で定義される T 行列より $V(\boldsymbol{r})=\int d^3ke^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}T(\boldsymbol{k})$ と積分し，(8-78) の脚注の積分公式を用い，

$$V(G) = -\frac{Gm_1 m_2}{r}\left[1+\frac{1}{2}\left(3+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}_1{}^2}{m_1{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_2{}^2}{m_2{}^2}\right)-\left\{4-\frac{1}{2}(1-x)\right\}\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2)}{m_1 m_2}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(1-x)\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{n})}{m_1 m_2}-\frac{1}{4}x\left\{\frac{(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{n})^2}{m_1{}^2}+\frac{(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{n})^2}{m_2{}^2}\right\}\right] \tag{8-93}$$

と，G-，Gv^2- ポテンシャルを得る．この式を (5-148)，(8-84) と比べると，

$$x = \lambda_0 = 2y \tag{8-94}$$

という簡単な関係で結ばれている．

次に，3 体の静的ポテンシャルを求めよう．これは図8-5からの寄与を計算すればよい．まず (a) 図から始めよう．(a) 図の真中の粒子は重力子と (8-61 c) の相互作用の中の $x^2/4[\phi_{2,\mu}\phi_{2,\nu}(\varphi^{\mu\nu}\varphi^\alpha{}_\alpha-2\varphi^{\mu\alpha}\varphi^\nu{}_\alpha)]$ によって両側の粒子と相互作用している．静的近似で考えているので，この (a) 図からの S 行列は

$$S_a = -\frac{iG^2}{2\pi^3}\frac{m_1 m_2 m_3}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}\left\{4\overline{X}_{00,0}{}^\alpha(k_1)\overline{X}_{0\alpha,00}(k_3)-\overline{X}_{00,00}(k_1)\overline{X}^\alpha{}_{\alpha,00}(k_3)\right.$$

$$\left.-\overline{X}_{00,\alpha}{}^\alpha(k_1)\overline{X}_{00,00}(k_3)\right\}\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-q_1-q_2-q_3). \tag{8-95}$$

ここで，$\overline{X}_{00,00}(k)=(\boldsymbol{k}^2/k^2)X_{00,00}$ 等で，$k_a=p_a-q_a$ $(a=1,2,3)$ である．静的極限では

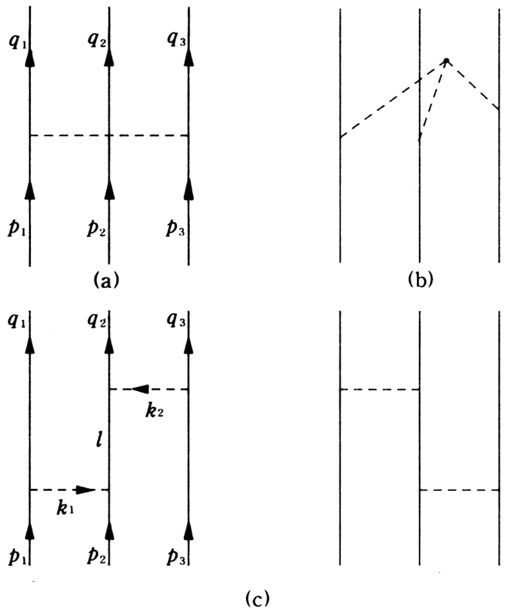


図 8-5

$$\overline{X}_{00,00}=1\,;\,\overline{X}_{00,0\alpha}=-\eta_{\alpha0}\,;\,\overline{X}_{00,\alpha}{}^{\alpha}=2\left(1+\frac{x}{4}\right) \tag{8-96}$$

である．(8-95)の m_1，m_2，m_3 を入れ替えたものを合計すると

$$S_a=\frac{iG^2}{2\pi^3}(8+x)m_1m_2m_3\left\{\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_2{}^2}+\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}+\frac{1}{\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}\right\}\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-q_1-q_2-q_3). \tag{8-97}$$

これを対応する配位空間でのポテンシャルの形に表わすと次のようになる．

$$V_a=-G^2(8+x)m_1m_2m_3\left\{\frac{1}{r_{12}r_{13}}+\frac{1}{r_{21}r_{23}}+\frac{1}{r_{31}r_{32}}\right\}. \tag{8-98}$$

図(b)に移ろう．(8-61c)の $x\varphi\partial\varphi\partial\varphi$ 型の相互作用によるものである．この型のものは13個ある．その中の簡単な例として，4次元発散項(div)を除いて

$$L'_b=\frac{x}{4}\partial_\alpha\varphi^\beta{}_\beta\partial^\alpha\varphi^\gamma{}_\gamma\cdot\varphi^\delta{}_\delta=-\frac{x}{8}\varphi^\beta{}_\beta\cdot\varphi^\gamma{}_\gamma\cdot\partial_\alpha\partial^\alpha\varphi^\delta{}_\delta \tag{8-99}$$

をとる．これによる S 行列

$$S'_b = -\frac{iG^2}{8\pi^3} m_1 m_2 m_3 \frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2 \boldsymbol{k}_2{}^2 \boldsymbol{k}_3{}^2} (\boldsymbol{k}_1{}^2 + \boldsymbol{k}_2{}^2 + \boldsymbol{k}_3{}^2) \overline{X}_{00,\alpha}{}^{\alpha}(k_1) \overline{X}_{00,\beta}{}^{\beta}(k_2) \overline{X}_{00,\gamma}{}^{\gamma}(k_3)$$

$$\times \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - q_1 - q_2 - q_3)$$

は(8-96)を用いると

$$S'_b = -\frac{iG^2}{\pi^3} m_1 m_2 m_3 \frac{(\boldsymbol{k}_1{}^2 + \boldsymbol{k}_2{}^2 + \boldsymbol{k}_3{}^2)}{\boldsymbol{k}_1{}^2 \boldsymbol{k}_2{}^2 \boldsymbol{k}_3{}^2} \left(1 + \frac{1}{4} x\right)^3 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - q_1 - q_2 - q_3) \tag{8-100}$$

となる．他の12個も計算し合計すると

$$S_b = -\frac{iG^2}{\pi^3} m_1 m_2 m_3 \left[\left(\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2 \boldsymbol{k}_2{}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2 \boldsymbol{k}_3{}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{k}_2{}^2 \boldsymbol{k}_3{}^2}\right) - \frac{x}{4}\left\{\left(\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{k}_2{}^2}\right)\frac{(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_2)}{\boldsymbol{k}_1{}^2 \boldsymbol{k}_2{}^2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{k}_3{}^2}\right)\frac{(\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{k}_3)}{\boldsymbol{k}_1{}^2 \boldsymbol{k}_3{}^2} + \left(\frac{1}{\boldsymbol{k}_2{}^2} + \frac{1}{\boldsymbol{k}_3{}^2}\right)\frac{(\boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{k}_3)}{\boldsymbol{k}_2{}^2 \boldsymbol{k}_3{}^2}\right\}\right] \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - q_1 - q_2 - q_3) \tag{8-101}$$

を得る．これを配位空間でのポテンシャルで書くと次式のようになる．

$$V_b = 2G^2 m_1 m_2 m_3 \left[\left(\frac{1}{r_{12} r_{13}} + \frac{1}{r_{21} r_{23}} + \frac{1}{r_{31} r_{32}}\right) + \frac{x}{8}\left\{\left(\frac{1}{r_{12}{}^2} + \frac{1}{r_{13}{}^2}\right)(\boldsymbol{n}_{21} \cdot \boldsymbol{n}_{31})\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{r_{12}{}^2} + \frac{1}{r_{23}{}^2}\right)(\boldsymbol{n}_{12} \cdot \boldsymbol{n}_{32}) + \left(\frac{1}{r_{13}{}^2} + \frac{1}{r_{23}{}^2}\right)(\boldsymbol{n}_{13} \cdot \boldsymbol{n}_{23})\right\}\right]. \tag{8-102}$$

終りに，図(c)からの寄与を考える．この図の場合には引き算が必要である．しかしこの引き算は重力子の伝播関数の分母の $k_0{}^2$ の問題がなくなったので§8-4よりは簡単である．図(c)の第1図の S 行列は次式で与えられる．

$$S_{c_1} = \frac{iG^2}{\pi^3}(p_1{}^0 q_1{}^0 p_2{}^0 q_2{}^0 p_3{}^0 q_3{}^0)^{-1/2} \frac{1}{(p_2 + k_1)^2 + m_2{}^2}$$

$$\times E(p_1, q_1; p_2, l\ ; k_1) E(p_3, q_3; l, q_2; k_3) \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 - q_1 - q_2 - q_3) \tag{8-103}$$

ただし

$$l = p_2 + k_1. \tag{8-103'}$$

上式の $E(p_1, q_1\ ; p_2, l\ ; k_1)$ は，(8-61 c)の相互作用より静的近似で残る寄与を集めると，(8-96)を用い

$$E(p_1, q_1\ ; p_2, l; k_1) = \frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2} p_1{}^{\alpha} q_1{}^{\beta} p_2{}^{\gamma} (p_2 + k_1)^{\delta} X_{\alpha\beta,\gamma\delta} - \frac{1}{2}\left\{(p_2 \cdot l) + m_2{}^2\right\} \frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2} p_1{}^{\alpha} q_1{}^{\beta} X_{\alpha\beta,\gamma}{}^{\gamma}$$

$$= \frac{1}{k_1{}^2} p_1{}^0 q_1{}^0 p_2{}^0 l^0 X_{00,00} + \frac{1}{2}\left\{p_2{}^0 l^0 - m_2{}^2\right\} \frac{1}{k_1{}^2} p_1{}^0 q_1{}^0 X_{00,\gamma}{}^{\gamma}$$

$$= \frac{m_1{}^2}{k_1{}^2}\left\{p_2{}^0 l^0\left(2+\frac{x}{4}\right) - m_2{}^2\left(1+\frac{x}{4}\right)\right\} \tag{8-104}$$

となる．同様に

$$E(p_3, q_3; l, q_2; k_3) = \frac{m_3{}^2}{k_3{}^2}\left\{q_2{}^0 l^0\left(2+\frac{x}{4}\right) - m_2{}^2\left(1+\frac{x}{4}\right)\right\}. \tag{8-104'}$$

引き算をする項として次のものをとらねばならない．

$$S'_{c_1} = -\frac{iG^2}{2\pi^3}(p_1{}^0 q_1{}^0 p_2{}^0 q_2{}^0 p_3{}^0 q_3{}^0)^{-1/2} \frac{1}{\omega^0(l^0-\omega^0)} E(p_1, q; p_2, \omega; k_1)$$

$$\times E(p_3, q_3; \omega, q_2; k_3)\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-q_1-q_2-q_3). \tag{8-105}$$

ただし

$$\omega = (\omega^0 = \sqrt{\boldsymbol{l}^2 + m_2{}^2}, \ \boldsymbol{l}), \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{k}$$

$$E(p_1, q_1; p_2, \omega; k_1) = \frac{m_1{}^2}{k_1{}^2}\left\{p_2{}^0 \omega^0\left(2+\frac{x}{4}\right) - m_2{}^2\left(1+\frac{x}{4}\right)\right\}$$

$$E(p_3, q_3; \omega, q_2; k_3) = \frac{m_3{}^2}{k_3{}^2}\left\{q_2{}^0 \omega^0\left(2+\frac{x}{4}\right) - m_2{}^2\left(1+\frac{x}{4}\right)\right\}.$$

したがって，

$$S_{c_1} - S'_{c_1} = \frac{iG^2}{\pi^3}(p_1{}^0 q_1{}^0 p_2{}^0 q_2{}^0 p_3{}^0 q_3{}^0)^{-1/2}\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-q_1-q_2-q_3)$$

$$\times\left\{-\frac{1}{(l^0+\omega^0)(l^0-\omega^0)}E(m_1, l^0)E(m_3, l^0) + \frac{1}{2\omega^0(l^0-\omega^0)}E(m_1, \omega)E(m_3, \omega)\right\}\frac{1}{k_1{}^2 k_3{}^2}. \tag{8-106}$$

ここで

$$\begin{cases} E(m_1, l^0) = m_1{}^2\left\{-m_2{}^2\left(1+\frac{x}{4}\right) + p_2{}^0 l^0\left(2+\frac{x}{4}\right)\right\}, \\ E(m_3, l^0) = m_3{}^2\left\{-m_2{}^2\left(1+\frac{x}{4}\right) + q_2{}^0 l^0\left(2+\frac{x}{4}\right)\right\} \\ E(m_1, \omega) = m_1{}^2 m_2{}^2, \quad E(m_3, \omega) = m_3{}^2 m_2{}^2 \end{cases}$$

である．いま

$$l^0 - \omega^0 = m_2\delta \ ; \ l^0 + \omega^0 = m_2(2+\delta) \tag{8-107}$$

とおくと，

$$E(m_1,l^0)=m_1{}^2m_2{}^2\left\{1+\delta\left(2+\frac{x}{4}\right)\right\}\ ;\ E(m_3,l^0)=m_3{}^2m_2{}^2\left\{1+\delta\left(2+\frac{x}{4}\right)\right\}. \tag{8-107'}$$

よって

$$S_{c_1}-S'_{c_1}=-\frac{iG^2}{\pi^3}\frac{m_1m_2m_3}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}\left\{\frac{\left(1+\delta(2+\frac{x}{4})\right)^2}{(2+\delta)\delta}-\frac{1}{2\delta}\right\}\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-q_1-q_2-q_3).$$

静的近似なのでδの１次以上を無視すると

$$S_{c_1}-S'_{c_1}=-\frac{iG^2}{4\pi^3}(7+x)\frac{m_1m_2m_3}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}\delta^{(4)}(p_1+p_2+p_3-q_1-q_2-q_3). \tag{8-108}$$

図(c)で m_1, m_2, m_3 を入れ替えたものをすべて合わせると

$$S_c-S'_c=-\frac{iG^2}{2\pi^3}(7+x)m_1m_2m_3\left\{\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_2{}^2}+\frac{1}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}+\frac{1}{\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}\right\} \tag{8-109}$$

となる．ポテンシャルの形にすると次式のようになる．

$$V_c=G^2(7+x)m_1m_2m_3\left\{\frac{1}{r_{12}r_{13}}+\frac{1}{r_{21}r_{23}}+\frac{1}{r_{31}r_{32}}\right\}. \tag{8-110}$$

以上の G^2 静的ポテンシャルを合わせると次の結果を得る．

$$V_{\text{static}}(G^2)=V_a+V_b+V_c=G^2m_1m_2m_3\left[\left(\frac{1}{r_{12}r_{13}}+\frac{1}{r_{21}r_{23}}+\frac{1}{r_{31}r_{32}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{x}{4}\left\{\left(\frac{1}{r_{12}{}^2}+\frac{1}{r_{13}{}^2}\right)(\boldsymbol{n}_{12}\cdot\boldsymbol{n}_{13})+\left(\frac{1}{r_{21}{}^2}+\frac{1}{r_{23}{}^2}\right)(\boldsymbol{n}_{21}\cdot\boldsymbol{n}_{23})+\left(\frac{1}{r_{31}{}^2}+\frac{1}{r_{32}{}^2}\right)(\boldsymbol{n}_{31}\cdot\boldsymbol{n}_{32})\right\}\right]. \tag{8-111}$$

これを一般化して，多体の静的ポテンシャルの形にすると

$$V_{\text{static}}(G^2)=\frac{G^2}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_am_bm_c}{r_{ab}r_{ac}}+\frac{x}{4}G^2\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_am_bm_c}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac}) \tag{8-112}$$

となる．２体の G^2 静的ポテンシャルは

$$V=\frac{1}{4}(2+x)\frac{G^2m_1m_2(m_1+m_2)}{r^2} \tag{8-113}$$

となり，パラメータ x に依存する．

pN の近似での Hamilton 関数は (8-93) と (8-112) より

$$
\begin{aligned}
H &= \sum_a m_a + \frac{1}{2}\sum_a \frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a} - \frac{1}{8}\sum_a m_a\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}\right)^2 - \frac{G}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}} \\
&\quad + \frac{G}{4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left[-\left(3+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}\right)+\frac{x}{2}\left\{\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)^2}{m_a{}^2}+\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)^2}{m_b{}^2}\right\}\right. \\
&\quad \left. +(7+x)\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+(1-x)\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\right]+\frac{G^2}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}} \\
&\quad + x\frac{G^2}{4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac}) \qquad (8\text{-}114)
\end{aligned}
$$

で与えられる．これは (5-148) で $y=x/2$ とおいたものにほかならない．われわれはこの近似までで，古典的に Fokker 型 Lagrange 関数から得たものと，S 行列からポテンシャルを求めて得たものとが全く一致することを見た．

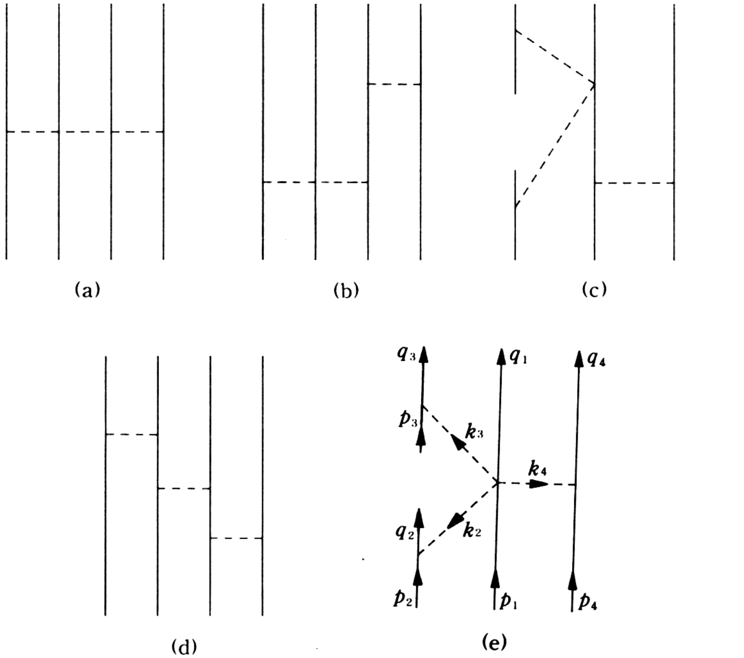


図 8-6

§ 8-7　ポスト-ポスト-Newton (ppN)近似でのポテンシャル

前節で見たように pN 近似のポテンシャルはパラメータ $x(=2y)$ に依存する項を含んでいる．しかし § 5-3の終りの方で述べたように，座標変換で $x=0$ のものと結びつけられる．ppN 近似で x を含むと非常に複雑なので，

$$x=0 \tag{8-115}$$

のゲージをとって，ppN 近似のポテンシャルを求めることにする [5]．

まず G^3 静的ポテンシャルを計算しよう．これに寄与する Feynman 図を書くと，下のような 4 体ポテンシャルを与える図となる(図8-6)．

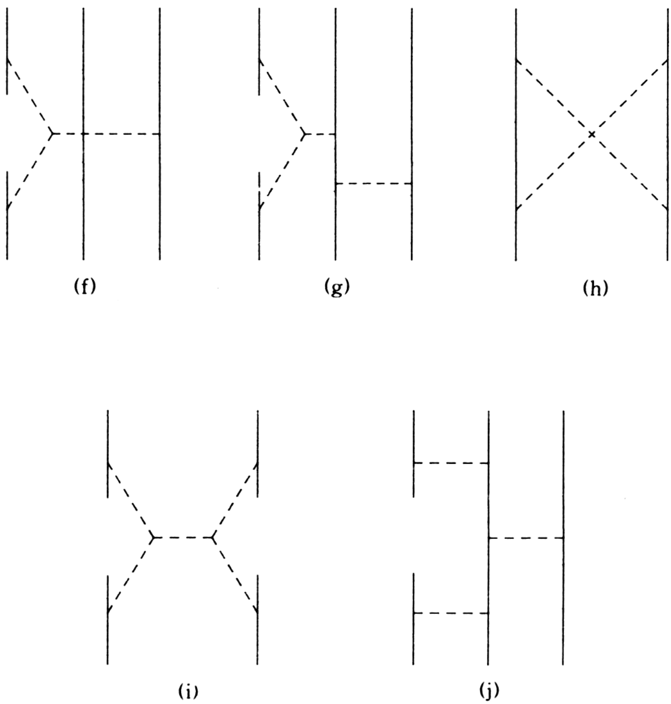


図 8-6(つづき)

上にあげたのは代表的なもので，重力子の交換の時間の順を替えた，図8-7のようなものも(b)図に含まれている．

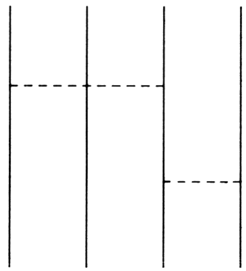


図 8-7

1例として(e)図からS行列を求めよう．(e)型には4通りの図があることに注意する(中央の粒子を替える)．図(e)では

$$S_e=\frac{iG^3}{16\pi^5}144\frac{m_1m_2m_3m_4}{\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2\boldsymbol{k}_4{}^2}\delta^{(4)}\Big(\sum_{a=1}^{4}p_a-\sum_{a=1}^{4}q_a\Big) \qquad \text{(8-116)}$$

となり，配位空間でのポテンシャルとして次式が得られる．

$$v_e=-36G^3\frac{m_1m_2m_3m_4}{r_{12}r_{13}r_{14}}.$$

(e)型には4通りあることを考慮してまとめると(この中には2体，3体も含まれている)

$$V_e=-6G^3\sum_{a}\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\sum_{d\neq a}\frac{m_am_bm_cm_d}{r_{ab}r_{ac}r_{ad}}$$

$$=-U\Big(\quad\Big) \qquad \text{(8-117)}$$



となる．ここで$U($  $)$は(5-134)で与えたもの(ただしここでは$c=1$)である．

(e)図以外に引き算を必要としないのは，(a)，(f)，(h)，(i)である．(a)，(f)，(h)は容易に計算できる．(i)は重力場の横波部分が寄与する例なので，S行列を求めてポテンシャルを定めよう．図8-8のように，外線，内線の運動量をとる．S行列は

$$S_i=-\frac{iG^3}{16\pi^5}\delta^{(4)}\Big(\sum_{a=1}^{4}p_a-\sum_{a=1}^{4}q_a\Big)\frac{m_1m_2m_3m_4}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2\boldsymbol{k}_4{}^2}$$

$$\times\Big\{33\boldsymbol{k}^2-9(\boldsymbol{k}_1{}^2+\boldsymbol{k}_2{}^2+\boldsymbol{k}_3{}^2+\boldsymbol{k}_4{}^2)-\frac{15}{\boldsymbol{k}^2}(\boldsymbol{k}_1{}^2+\boldsymbol{k}_2{}^2)(\boldsymbol{k}_3{}^2+\boldsymbol{k}_4{}^2)\Big\}$$

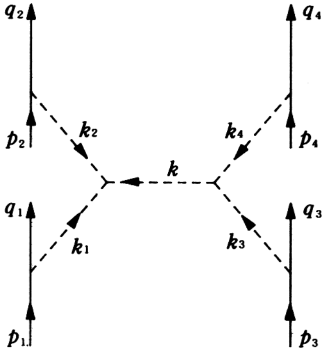


図 8-8

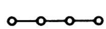
$$+\frac{iG^3}{\pi^5}\delta^{(4)}\Big(\sum_{a=1}^{4}p_a-\sum_{a=1}^{4}q_a\Big)\frac{m_1m_2m_3m_4}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2\boldsymbol{k}_2{}^4\boldsymbol{k}^2}$$

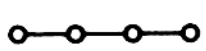
$$\times\{K(k_1,k_3)K(k_2,k_4)+K(k_1,k_4)K(k_2,k_3)-K(k_1,k_2)K(k_3,k_4)\} \tag{8-118}$$

となる．ただし

$$K(k_a,k_b)=(\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{k}_b)-\frac{(\boldsymbol{k}_a\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k}_b\cdot\boldsymbol{k})}{\boldsymbol{k}^2}=k_a{}^ik_b{}^j\Big(\eta_{ij}-\frac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\Big).$$

(8-118)の右辺の第 2 項が φ_{ij} の横波部分 $\varphi^{\mathrm{TT}}_{ij}(k)$（図8-8の中央部）からの寄与である．この図で m_2 と m_3 および m_2 と m_4 を入れ換えたものもあるので，これらを含めて，次のように表わされる．

$V_i=\frac{1}{4}U\Big($  $\Big)-\frac{15}{8}U($  $)+U^{\mathrm{TT}}.$ 　(8-119)

ここで $U($  $)$ は(5-134)で，U^{TT} は(5-136)で与えられたものである．引き算の必要がない，(a)，(f)，(h)も容易にポテンシャルの形に書かれ，結果は後に表で示す．

次に引き算の必要な図は(b)，(c)，(d)，(g)，(j)である．(b)，(c)，(d)は 1 回の引き算が必要である．われわれは $X^F_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ の代りに $X_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ としたので，

静的ポテンシャルを求めている以上，スカラー粒子の中間状態の運動量に対する任意性はなく，前節と同じように計算することによって結果が得られる．(d)，(j)については，(8-73c)で示しておいたように2回の引き算が必要である．しかし，(d)の場合は1回の引き算の場合と平行して行われてポテンシャルが得られる．問題なのは(j)の場合である．

以下，(j)図について詳しく述べる．(j)図に図8-9のように運動量と質量の番号付けをする．簡単のため，$m_4 = m$ とおく．この T 行列を

$$T_{321} = \frac{F(l_2^0, l_1^0)}{2(q^0 p^0)(l_2^2 + m^2)(l_1^2 + m^2)} \tag{8-120}$$

とする．ここで

$$F(l_2^0, l_1^0) = aM_3(q^0, l_2^0)M_2(l_2^0, l_1^0)M_1(l_1^0, p^0) \tag{8-121}$$

$$a = \frac{-G^3 m^6 m_1 m_2 m_3}{\pi^6 \boldsymbol{k}_1^2 \boldsymbol{k}_2^2 \boldsymbol{k}_3^2} \tag{8-121'}$$

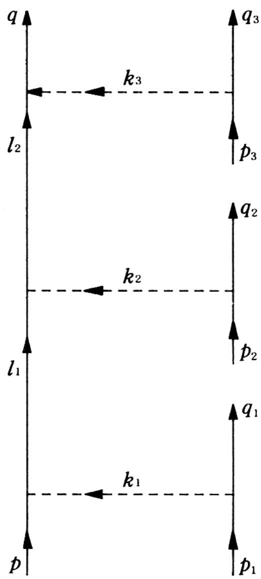
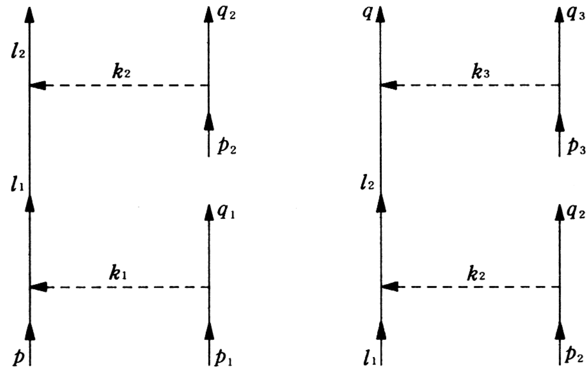


図 8-9



(i) T_{21}　　(ii) T_{32}

図 8-10

また $M_2(l_2^0, l_1^0)$ 等は，§8-6の(8-104)で与えたEの｛　　｝の中のパラメータを $x=0$，$m_2=m$ とし，m^{-2} 倍したものである．すなわち

$$M_2(l_2^0, l_1^0)=\frac{(2l_2^0 l_1^0-m^2)}{m^2}, \text{ 等.} \tag{8-121″}$$

2回引き算のため(8-73c)に帰ろう．求めるポテンシャルは

$$T_{321}=V_{321}+\frac{V_3 V_{21}}{l_2^0-\omega_2}+\frac{V_{32}V_1}{l_1^0-\omega_1}+\frac{V_3 V_2 V_1}{(l_2^0-\omega_2)(l_1^0-\omega_1)} \tag{8-122}$$

で結ばれている．ここに $\omega_a=(\boldsymbol{l}_a^2+m^2)^{1/2}$，$a=1,2$．$V_{321}$ を定めるには V_{21}，V_{32} を知る必要があり，そのためには，T_{21}，T_{32} が必要である(図8-10)．T_{21} は

$$\begin{aligned}&T_{21}(\omega_2, q_1^0, q_2^0 ; p^0, p_1^0, p_2^0)\\&=\frac{1}{2(\omega_2 p^0)^{1/2}}\frac{G^2 m_1 m_2 m^4}{\pi^4 \boldsymbol{k}_2^1 \boldsymbol{k}_2^2}\frac{M_2(\omega_2, E_1)M_1(E_1, p^0)}{(E_1+\omega_1)(E_1-\omega_1)}\end{aligned} \tag{8-123}$$

で与えられる．ここで E_1 は運動量が $\boldsymbol{l}_1$，質量が $m=m_4$ の粒子の中間状態のエネルギーである．このとき $M_2(\omega_2,\ E_1)$ とし，$M_2(l_2^0,\ E_1)$ としなかった理由は，T 行列での外部粒子は自由粒子をとらねばならないからである．つまり l_2^0 の代りに ω_2 を用いた．しかし，ここで特に注意すべき重要なことは，T_{21} は厳密には場の理論的には定義できない点である．なぜならT行列では始状態と終状態とのエネルギーは等しくなければならないが，$(p^0+p_1^0+p_2^0)$ と $(\omega_2+q_1^0+q_2^0)$ とは等しくな

い．したがって(8-123)の E_1 にも任意性がある．重力子 $\boldsymbol{k}_1$ を吸収する頂点において，エネルギー保存則を用いると，$E_1 = l_1^0(=p^0+k_1^0)$ であり，$\boldsymbol{k}_2$ を吸収する頂点において，保存則を用いると，$E_1 = \omega_2 - k_2^0$ である．この任意性を実数パラメータ η を用いて表わすと

$$E_1 = (1-\eta)l_1^0 + \eta(\omega_2 - k_2^0) \tag{8-124}$$

となる．T_{32} に対しても同様で，次式で与えられる．

$$T_{32}(q^0, q_2^0; q_3^0; \omega_1, p_2^0, p_3^0) = \frac{1}{2(q^0\omega_1)^{1/2}} \frac{G^2 m_2 m_3 m^4}{\pi^4 \boldsymbol{k}_2^2 \boldsymbol{k}_3^2} \frac{M_3(q^0, E_2) M_2(E_2, \omega_1)}{(E_2+\omega_2)(E_2-\omega_2)} \tag{8-123$'$}$$

$$E_2 = (1-\eta)l_2^0 + \eta(\omega_1 + k_2^0). \tag{8-124$'$}$$

(8-123)，(8-123′)より，V_{21}，V_{32} は引き算を考慮し

$$V_{21} = \frac{1}{2(\omega_2 p^0)^{1/2}(E_1-\omega_1)} \frac{G^2 m_1 m_2 m^4}{\pi^4 \boldsymbol{k}_1^2 \boldsymbol{k}_2^2} \left(\frac{M_2(\omega_2, E_1) M_1(E_1, p^0)}{E_1+\omega_1} - \frac{M_2(\omega_2, \omega_1) M_1(\omega_1, p^0)}{2\omega_1} \right) \tag{8-125}$$

$$V_{32} = \frac{1}{2(\omega_1 q^0)^{1/2}(E_2-\omega_2)} \frac{G^2 m_2 m_3 m^4}{\pi^4 \boldsymbol{k}_2^2 \boldsymbol{k}_3^2} \left(\frac{M_3(q^0, E_2) M_2(E_2, \omega_1)}{E_2+\omega_2} - \frac{M_3(q^0, \omega_2) M_2(\omega_2, \omega_1)}{2\omega_2} \right)$$

となる．$V_a\,(a=1,2,3)$ は

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{M_1(\omega_1, p^0)}{2(\omega_1 p^0)^{1/2}} \frac{G m_1 m^2}{\pi^2 \boldsymbol{k}_1^2} \\ V_2 &= -\frac{M_2(\omega_2, \omega_1)}{2(\omega_2 \omega_1)^{1/2}} \frac{G m_2 m^2}{\pi^2 \boldsymbol{k}_2^2} \\ V_3 &= -\frac{M_3(q^0, \omega_2)}{2(q^0 \omega_2)^{1/2}} \frac{G m_3 m^2}{\pi^2 \boldsymbol{k}_3^2} \end{aligned} \tag{8-126}$$

である．(8-125)，(8-126)を(8-122)に代入すると

$$V_{321} = \frac{1}{2(q^0 p^0)^{1/2}} \left\{ \frac{F(l_2^0, l_1^0)}{(l_2^0+\omega_2)(l_2^0-\omega_2)(l_1^0+\omega_1)(l_1^0-\omega_1)} - \frac{F(\omega_2, E_1)}{2\omega_2(l_2^0-\omega_2)(E_1+\omega_1)(E_1-\omega_1)} - \frac{F(E_2, \omega_1)}{2(E_2+\omega_2)(E_2-\omega_2)\omega_1(l_1^0-\omega_1)} \right.$$

$$+\frac{F(\omega_2,\omega_1)}{4\omega_2(l_2{}^0-\omega_2)\omega_1(E_1-\omega_1)}+\frac{F(\omega_2,\omega_1)}{4\omega_2(E_2-\omega_2)\omega_1(l_1{}^0-\omega_1)}$$

$$-\left.\frac{F(\omega_2,\omega_1)}{4\omega_2(l_2{}^0-\omega_2)\omega_1(l_1{}^0-\omega_1)}\right\} \tag{8-127}$$

と表わされる．$l_1{}^0, l_2{}^0, E_1, E_2$ を次のようにおく

$$l_1{}^0=\omega_1(1+\delta_1),\quad l_2{}^0=\omega_2(1+\delta_2)\,;\ E_1=\omega_1(1+\varepsilon_1),\quad E_2=\omega_2(1+\varepsilon_2). \tag{8-128}$$

(8-124), (8-124′)から静的近似($\omega_2=\omega_1$)で満たされる関係式

$$\varepsilon_2=\delta_2-\eta\delta_1,\quad \varepsilon_1=\delta_1-\eta\delta_2 \tag{8-129}$$

を用いると，(8-121′)の a によって F は次のようになる．

$$\begin{aligned}
F(l_2{}^0, l_1{}^0)&=a\{1+4(\delta_1+\delta_2)+4(\delta_1{}^2+\delta_2{}^2)+14\delta_1\delta_2\}\\
F(\omega_2, E_1)&=a\{1+2\delta_1-2\eta\delta_2\}\\
F(E_2, \omega_1)&=a\{1+2\delta_2-2\eta\delta_1\}\\
F(\omega_1, \omega_2)&=a.
\end{aligned} \tag{8-130}$$

(8-128)～(8-130)を(8-127)に代入して計算した後に残る δ_i 依存項は静的ポテンシャルを求めているので $\delta_i\to 0$ とおくことができて

$$V_{321}=\frac{1}{32m^5}a(41+18\eta)=-\frac{G^3}{32\pi^6}\frac{m_1m_2m_3m}{\boldsymbol{k}_1{}^2\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2}(41+18\eta) \tag{8-131}$$

を得る．(j)図は m_1, m_2, m_3, m_4 の組み合わせとして24通りあることに注意すると配位空間におけるポテンシャルとして次の結果が導かれる．

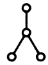
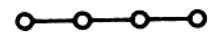
$$V_j=-\frac{1}{4}(41+18\eta)U\Big(\ $$  $$\ \Big). \tag{8-132}$$

ここで，各図からの結果を次の表 1 に書く．

表　1

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	計
$U($  $)$	0	0	18	0	-6	$\frac{33}{12}$	$-\frac{21}{12}$	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}(41+18\eta)$	$2-\frac{9}{2}\eta$
$U($ $)$	$-\frac{55}{2}$	47	0	-20	0	$\frac{29}{2}$	$-\frac{25}{2}$	0	$-\frac{15}{8}$	0	$-\frac{3}{8}$

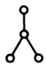
結局，G^3 の静的ポテンシャルとして次式を得る．

$$V_4(G^3)=\left(2-\frac{9}{2}\eta\right)U\Big($$  $$\Big)-\frac{3}{8}U($$  $$)+U^{\mathrm{TT}} \tag{8-133}$$

ここで

$$\eta=\frac{1}{2} \tag{8-134}$$

とおくと

$$V_4(G^3)=-\frac{1}{4}U\Big($$  $$\Big)-\frac{3}{8}U($$  $$)+U^{\mathrm{TT}} \tag{8-135}$$

となる．これは§5-3で Fokker 型 Lagrange 関数から古典的に求めた(5-153)，あるいは正準形式で求めたものと全く一致する．$\eta=1/2$ は，質量 $\boldsymbol{m}$，運動量 $\boldsymbol{l}$ の中間状態の粒子が持つエネルギー E_1 を，可能な $l_1{}^0(=p_1{}^0+k_1{}^0)$ と $(\omega_2-k_2{}^0)$ との平均値で定義すれば古典的な方法から得られたものと一致する，というきわめて自然な仮定と思われる．η を初めて導入したのは緋田・横谷等である［6］．

次に G^2p^2 のポテンシャルを求める際に注意すべきことを述べる．このポテンシャルに効く Feynman 図は，次の図8-11である．(i)図については，問題はなく，T 行列はただちに得られる．(ii)図については引き算項に対する注意が必要である．粒子 1 の内線の 4 次元運動量を l_μ とする．l_0 としては

$$l_0=p_{10}+p_{30}-q_{30}, \tag{8-136 a}$$

$$l_0=q_{10}-p_{20}+q_{20} \tag{8-136 b}$$

の 2 通りが考えられる．図(ii)の T 行列が

$$T_{\mathrm{ii}}=\frac{F(l^0)}{\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2(l^2+\boldsymbol{m}_1{}^2)}$$

のとき，次の

$$\tilde{T}_{\mathrm{ii}}=\frac{F(\omega)}{2\boldsymbol{k}_2{}^2\boldsymbol{k}_3{}^2\omega(l^0-\omega)},\quad \omega=\sqrt{m_1{}^2+\boldsymbol{l}^2} \tag{8-137}$$

を引き算しなければならない．$T_{\mathrm{ii}}-\widetilde{T}_{\mathrm{ii}}$ を実際に計算すると，l^0 についての 1 次の項を含む．静的ポテンシャルを求める場合には $l^0=m_1$ とおけばよいが G^2p^2 ポテンシャルでは，(8-136)で $p_a{}^0=(m_a{}^2+\boldsymbol{p}_a{}^2)^{1/2}$，$q_a{}^0=(m_a{}^2+\boldsymbol{q}_a{}^2)^{1/2}$ を用いると，$E_a\fallingdotseq E_b$ では(8-136 a)，(8-136 b)は異なる結果を与える．したがって G^2p^2 ポテンシャルには(8-136 a)，(8-136 b)の組み合せにより任意性が生じてくる．しかし，この任意性は G^3 静的ポテンシャルの図の(j)の場合と対応している．そこでは(8

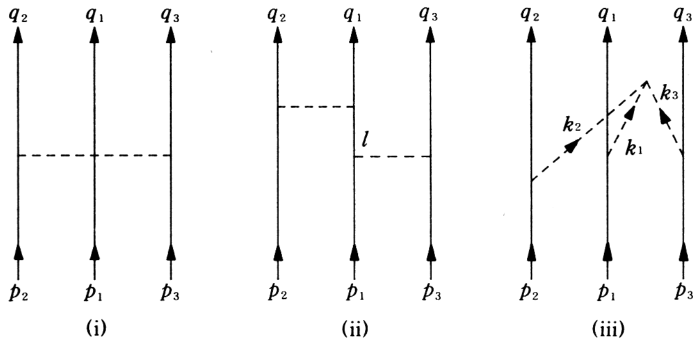


図 8-11

-124)の $\eta=1/2$ とおくことにより古典と一致することが示された．首尾一貫したポテンシャルを得るためには，今の場合も(8-136 a)と(8-136 b)の相加平均をとるべきである．

次に(iii)の場合には $\varphi\partial\varphi\partial\varphi$ 型の相互作用に時間微分について 1 次の項が現われる際に注意が必要である．この相互作用を運動量空間で

$$\chi\varphi_{\mu_1\nu_1}(k_1)\varphi_{\mu_2\nu_2}(k_2)\varphi_{\mu_3\nu_3}(k_3)V^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}(k_1,k_2,k_3)$$

と書き頂点関数 $V^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}(k_1,k_2,k_3)$ のうち，G^2p^2 ポテンシャルに任意性が生ずるものを探す．(8-61 c)，それを成分に分けて書いた付録の(A-5-3)から，問題を起こすのは $\varphi_{0i}\varphi_{00,0}\varphi_{00,i}$ 型の項のみであることがわかる．したがって頂点関数は次のものから任意性が生ずる．

$$V^{0i,00,00}(k_1,k_2,k_3)\simeq(k_2{}^0k_3{}^i+k_3{}^0k_2{}^i) \qquad (8\text{-}138)$$

ここで $k_1{}^0+k_2{}^0+k_3{}^0=0$ を考慮すると，実数パラメータ ξ を導入して

$$V^{0i,00,00}(k_1,k_2,k_3)\simeq(k_2{}^0k_3{}^i+k_3{}^0k_2{}^i)+\xi k_1{}^i(k_1{}^0+k_2{}^0+k_3{}^0) \qquad (8\text{-}139)$$

と拡張できよう．上の 2 式において，$k_a{}^0=(m_a{}^2+\boldsymbol{p}_a{}^2)^{1/2}-(m_a{}^2+\boldsymbol{q}_a{}^2)^{1/2}$ とすると $E_a\neq E_b$ では，(8-138)，(8-139)は異なる G^2p^2 ポテンシャルを与える．これに対応したことは G^3 静的ポテンシャルの図8-6の(g)でも存在している．そこではわれわれは $\xi=0$ としてポテンシャルを導出した．理論が整合的であるためには，G^2p^2 ポテンシャルにおいても $\xi=0$ とおくべきである．

以上のことに留意し，図8-11の(ii)で粒子 2 と 3 を入れ替えたものがあることを

考慮してT行列を求めればよい．計算は複雑なので略し結論を述べると，結果をFourier変換したものは，古典論から導いた(5-154)のG^2p^2項と一致する．

Gp^4ポテンシャルについては全く問題はなく(5-155)のGp^4項を導く．摂動の各次数で一貫した手法をとればS行列から得られるポテンシャルは古典論からのポテンシャルと合致することがわかった．当然のことながら，(8-19)の$\gamma^{\mu\nu}$を用いて摂動計算しても同一の答が得られる．

第9章　重力場における量子異常項

重力場と量子論がかかわりを持つ現象として，軸性電流の保存則の量子論的効果による破れの問題がある．これは重力場とスピン1/2のDirac粒子が相互作用しているとき，図9-1のように，スピン1/2粒子のループによって，古典論では保存していた軸性電流に量子論効果による付加項が加わり，保存則が破れる現象で，この付加項は**量子異常項**と呼ばれる．また，時空が特定の次元のとき，Lorentz不変性や一般共変性の破れが生じる．これらの問題は，重力子のループが直接関与しないので，重力場特有の発散の問題を抜きにして扱われる．

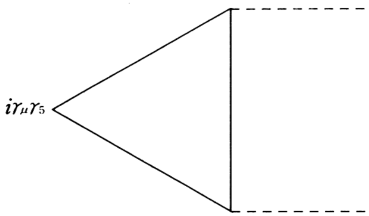


図 9-1

§9-1　重力場の中でのDirac粒子

重力場の中でのDirac粒子の方程式を導くことから始めよう．Minkowski時空における質量m，スピン1/2の粒子は，(1-39)で示したように次のLagrange関数で記述される．

$$L = -\frac{1}{2}\{\overline{\psi}\gamma^a\partial_a\psi - \partial_a\overline{\psi}\gamma^a\psi\} - m\overline{\psi}\psi. \tag{9-1}$$

ここで，ψは4行1列のスピノール場で，$\overline{\psi}$は1行4列の

$$\overline{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0 = -i\psi^\dagger\gamma_0$$

である．γ^aは反交換関係

$$\{\gamma^\alpha,\ \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \tag{9-2}$$

を満たす4行4列の行列で，Dirac 行列と呼ばれている．これは Pauli 行列 ρ_a，σ_b を用いて，$\gamma^0 = -i\rho_1$，$\gamma^i = \rho_2\sigma_i\ (i=1,2,3)$ と表わされる．γ^i はエルミートで γ^0 は反エルミートである．以上を計量 $g^{\mu\nu}$ を持つ Riemann 空間に拡張しよう．(9-2) の代りに

$$\{\gamma^\mu(x),\ \gamma^\nu(x)\} = 2g^{\mu\nu}(x) \tag{9-3}$$

を満たすように $\gamma^\mu(x)$ を作る．このため，4脚場 $h_\alpha{}^\mu(x)$ を導入しよう．添字の α，β，…は局所 Lorentz 系の添字で，μ，ν，…は Riemann 空間のものである．具体的に，4脚場 $h_\alpha{}^\mu$ を次式を満たすように作る．

$$\eta^{\alpha\beta}h_\alpha{}^\mu(x)h_\beta{}^\nu(x) = g^{\mu\nu}(x)\ ;\ g_{\mu\nu}(x)h_\alpha{}^\mu(x)h_\beta{}^\nu(x) = \eta_{\alpha\beta}. \tag{9-4}$$

もちろん，添字 α，β，…の上げ下げは $\eta_{\alpha\beta}$，$\eta^{\alpha\beta}$ で，添字 $\mu,\nu,$…の上げ下げは $g_{\mu\nu}$，$g^{\mu\nu}$ で行われる．そして，(9-3)の $\gamma^\mu(x)$ は $\gamma^\mu(x) = h_\alpha{}^\mu(x)\gamma^\alpha$ で与えられる*)．

Minkowski 空間における (9-1) を，局所 Lorentz 変換，および一般座標変換に対して不変になるように，Riemann 空間における Lagrange 関数に拡張する．

局所 Lorentz 変換を表わすパラメータ関数を $\varepsilon^{\alpha\beta}(x) = -\varepsilon^{\beta\alpha}(x)$ とすると，$h_\alpha{}^\mu(x)$，$\psi(x)$ に対する局所 Lorentz 変換は

$$\delta h_\alpha{}^\mu(x) = \varepsilon_\alpha{}^\beta(x)h_\beta{}^\mu(x)\ ;\ \delta\psi(x) = \frac{1}{8}\varepsilon^{\alpha\beta}(x)[\gamma_\alpha,\ \gamma_\beta]\psi(x) \tag{9-5}$$

と定義される．$\varepsilon^{\alpha\beta}(x)$ が時空座標 x^μ に依存するので，この変換に対して Lagrange 関数が不変になるためには $\partial_\mu\psi(x)$ を

$$\partial_\mu\psi \longrightarrow \left(\partial_\mu + \frac{1}{8}\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\right)\psi \tag{9-6}$$

のように接続場 $\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}(x) = -\omega^{\beta\alpha}{}_{,\mu}(x)$ を導入して拡張しなければならない**)．こ

---

*）スピノールは Lorentz 変換の既約表現であるが，一般座標変換の既約表現ではない．このため，時空の各点における接空間(局所 Lorentz 系)と Riemann 空間を結びつけるものとして4脚場が導入される．$h_\alpha{}^\mu$ は接空間を張る4つの接線ベクトル h_α の μ 成分である．

**）$\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ 中のコンマは初めの2つの添字について反対称であることを示す．本章ではコンマは微分の意味では一切用いない．

こで $\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}(x)$ は無限小局所 Lorentz 変換に対して次のように変換するものとする.

$$\begin{aligned}&\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu} \longrightarrow \omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}+\delta\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}\,,\\&\delta\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}=\varepsilon^{\alpha}{}_{\gamma}\omega^{\gamma\beta}{}_{,\mu}+\varepsilon^{\beta}{}_{\gamma}\omega^{\alpha\gamma}{}_{,\mu}-\partial_\mu\varepsilon^{\alpha\beta}\,.\end{aligned} \tag{9-7}$$

この $\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ はスピン接続場と呼ばれる*).

(9-4) を満たす4脚場は，計量テンソル $g^{\mu\nu}$ よりも，基本的な量である．$g^{\mu\nu}$ は Christoffel シンボルに関しての共変微分をほどこすと 0 であった．これに対応して，4脚場は Christoffel シンボルおよび接続場 $\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ に関しての共変微分で 0 となるようにとるのが，自然で簡単な Riemann 空間への拡張であろう．

$$\partial_\mu h^{\alpha}{}_{\lambda}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}h^{\alpha}{}_{\rho}+\omega^{\alpha\gamma}{}_{,\mu}\eta_{\gamma\beta}h^{\beta}{}_{\lambda}=0\,. \tag{9-8}$$

この式を (9-4) を用いて $\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ について解くと

$$\omega_{\alpha\beta,\mu}=h_{\alpha}{}^{\lambda}(\partial_\mu h_{\beta\lambda}-\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}h_{\beta\rho}) \tag{9-9}$$

となる．

以上のことから，求める Lagrange 関数は

$$L=-h\left[\frac{1}{2}(\overline{\psi}\gamma^{\alpha}h_{\alpha}{}^{\mu}\nabla_{\mu}\psi-\overline{\psi}\overleftarrow{\nabla_{\mu}}\gamma^{\alpha}h_{\alpha}{}^{\mu}\psi)+m\overline{\psi}\psi\right], \tag{9-10}$$

ただし

$$h=\sqrt{-g}=\det h^{\alpha}{}_{\mu}\;,$$

$$\nabla_{\mu}=\partial_\mu+\frac{1}{8}\omega_{\alpha\beta,\mu}[\gamma^{\alpha},\ \gamma^{\beta}]\;;\;\overleftarrow{\nabla_{\mu}}=\overleftarrow{\partial_\mu}-\frac{1}{8}\omega_{\alpha\beta,\mu}[\gamma^{\alpha},\ \gamma^{\beta}]$$

である．

ここで注意すべきことは γ^{α}，γ^{β} 等の添字 α，β 等をつけた Dirac 行列は，Minkowski 空間のもので (9-2) を満たすことである．(9-10) から導かれる運動方程式は

$$\left\{h_{\alpha}{}^{\mu}(x)\gamma^{\alpha}(\partial_\mu+\Gamma_\mu(x))+m\right\}\psi=0\,, \tag{9-11}$$

ただし，$\Gamma_\mu(x)$ は

---

*) 本書では対称な affine 係数 ($\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}$) のみ考えているが，affine 係数に反対称な部分（捩率と呼ばれる）があると，(9-9)の $\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}$ の反対称部分を通じて $\omega_{\alpha\beta,\mu}$ は素粒子のスピンと結びつく．詳しいことは第10章の文献［9］を参照されたい．

$$\Gamma_\mu(x)=\frac{1}{8}\omega_{\alpha\beta,\mu}(x)[\gamma^\alpha,\ \gamma^\beta]$$

で，次式を満たす．

$$\partial_\mu\gamma_\nu(x)=\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\gamma_\lambda(x)-[\Gamma_\mu(x),\ \gamma_\nu(x)]. \tag{9-12}$$

軸性電流を定義するため γ_5 行列を次式によって導入しよう．

$$\begin{aligned}\gamma_5&=-i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3=-i\frac{1}{24}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta\\&=-i\frac{1}{24}\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\gamma_\mu(x)\gamma_\nu(x)\gamma_\lambda(x)\gamma_\rho(x).\end{aligned} \tag{9-13}$$

ここで，$\varepsilon^{0123}=1$ で，Pauli 行列で表わせば $\gamma_5=-\rho_3$ で

$$\gamma_5{}^2=1 \tag{9-14}$$

を満たす．この γ_5 を用いて**軸性電流** $J_5{}^\mu(x)$ を

$$J_5{}^\mu(x)=i\overline{\psi}(x)\gamma^\mu(x)\gamma_5\psi(x) \tag{9-15}$$

と定義する．また，擬スカラー量として

$$J_5(x)=i\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) \tag{9-16}$$

を導入する．(9-11) および (9-12) を用いると，次の関係式

$$\partial_\mu\{\sqrt{-g}J_5{}^\mu(x)\}=2m\sqrt{-g}J_5(x) \tag{9-17}$$

が成立することがわかる．次節で，量子論的効果を取り入れるとこの関係式が満たされなくなることを摂動論を用いて示す．摂動展開のために，第8章と同様に $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+\chi\varphi_{\mu\nu}$ とおき，(9-10) の Lagrange 関数を $\varphi_{\mu\nu}$ で表わす．$h_\alpha{}^\mu(x)$ として，$h_{\mu\alpha}=h_{\alpha\mu}$ のようなゲージをとることにすると，

$$h_\alpha{}^\mu=\delta_\alpha{}^\mu-\frac{1}{2}\chi\varphi_\alpha{}^\mu+\frac{3}{8}\chi^2\varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\beta\mu}+\cdots$$

のように $\varphi_{\mu\nu}$ で表わされる*)．χ^2 までの近似で (9-10) は

$$L=-\frac{1}{2}[\overline{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi-\partial_\beta\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi]\Big[\eta^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\chi(\varphi^{\alpha\beta}-\eta^{\alpha\beta}\varphi^\gamma{}_\gamma)$$

---

*) $h_{\mu\alpha}=h_{\alpha\mu}$ は接空間を張る接線ベクトルに対する条件であり，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ に対するゲージの自由度は残っている．また，Minkowski 空間を背景空間とする摂動展開においては，添字 μ，ν，…の上げ下げは $\eta_{\mu\nu}$，$\eta^{\mu\nu}$ で行われる．したがって，添字 α，β，…と μ，ν，…を識別する必要はない．

$$+\frac{1}{8}\chi^2\{\eta^{\alpha\beta}(\varphi^\gamma{}_\gamma\varphi^\delta{}_\delta-2\varphi^{\gamma\delta}\varphi_{\gamma\delta})-2\varphi^{\alpha\beta}\varphi^\gamma{}_\gamma+3\varphi^{\alpha\gamma}\varphi^\beta{}_\gamma\}\Big]$$

$$-m\overline{\psi}\psi\left[1+\frac{1}{2}\chi\varphi^\alpha{}_\alpha+\frac{1}{8}\chi^2\{\varphi^\alpha{}_\alpha\varphi^\beta{}_\beta-2\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta}\}\right]$$

$$-\frac{i\chi^2}{16}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\overline{\psi}\gamma_5\gamma_\alpha\psi\cdot\varphi_{\beta\epsilon}\partial_\gamma\varphi^\epsilon{}_\delta \tag{9-18}$$

となる．(9-18) の最後の項はスピン接続場 $\omega^{\alpha\beta}{}_{,\mu}$ からの寄与で (9-9) を用いて得られた．

量子電気力学における軸性電流の量子論的効果による破れを明白な形で示したのはS.L. Adler [1] である．それはFeynman図によったもので，現われる積分の発散量をゲージ不変性の原理を用いて除去することにより，不定性なしに量子異常項を決定した．重力場の中においても同様なことがいえるかどうか次節以下で考察しよう．

§9-2　Feynman 図による軸性異常項の計算

(9-15) で与えた $J_5{}^\mu$ および (9-16) の J_5 に対する量子論的補正をFeynman図によって摂動計算で求めよう．(9-18) の相互作用Lagrange関数の形からわかるように $J_5{}^\mu$ の補正に効くFeynman図は図9-2の3個である．

実線のループはDirac粒子を表わす．図9-2a は (9-18) の最後の項からの寄与である．図9-2b は (9-18) の χ についての最低次の相互作用項

$$L^{(1)}=\frac{1}{4}\chi(\varphi^{\alpha\beta}-\eta^{\alpha\beta}\varphi^\gamma{}_\gamma)(\overline{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi-\partial_\beta\overline{\psi}\gamma_\alpha\psi) \tag{9-19}$$

と第8章の (8-61c) の φ についての3次の相互作用項から生じるものである．図9-2c には k_1 と k_2 を入れ替えたものもあることを注意しておく．

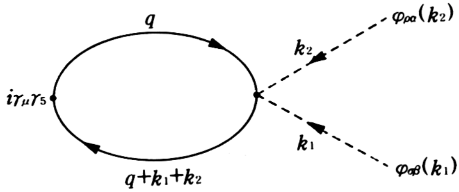
Dirac粒子の伝播関数として*)

$$\langle 0|\mathrm{T}(\psi(x)\overline{\psi}(y))|0\rangle=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,e^{ip\cdot(x-y)}\frac{i(\gamma p)-m}{p^2+m^2-i\varepsilon} \tag{9-20}$$

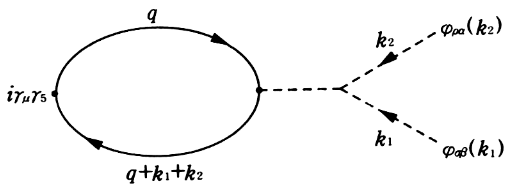
をとる．図9-2a，図9-2b は光子の自己エネルギーと同じ型のFeynman積分を計算することになる．これら2つの図からの寄与は次の形に書ける．

---

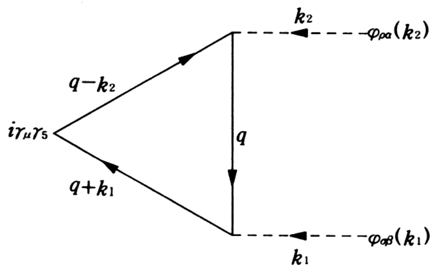
*）　$p\cdot(x-y)=p_\mu(x^\mu-y^\mu)$，$(\gamma p)=\gamma^\mu p_\mu$，$p^2=p_\mu p^\mu$



(a)



(b)



(c)

図 9-2

$$\langle L_{\mu 5}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{(2k_1{}^0)^{1/2}}\frac{1}{(2k_2{}^0)^{1/2}}\varphi^{\sigma\beta}(k_1)\varphi^{\rho\alpha}(k_2)(-i\chi^2)L_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}(k_1, k_2), \quad (9\text{-}21)$$

ここで

$$\begin{aligned} L_{\beta\alpha\sigma\rho\mu} = &\frac{1}{2}\{L_1 k_1{}^\xi + L_2 k_2{}^\xi\}\{\eta_{\alpha(\beta}\varepsilon_{\xi\sigma)\rho\mu} + \eta_{\rho(\beta}\varepsilon_{\xi\sigma)\alpha\mu}\} \\ &+ \{L_3 k_{1(\rho} + L_4 k_{2(\rho}\}\eta_{\alpha)(\beta} k_1{}^\xi k_2{}^\eta \varepsilon_{\xi\eta\sigma)\mu} \\ &+ \{L_5 k_{1(\sigma} + L_6 k_{2(\sigma}\}\eta_{\beta)(\alpha} k_1{}^\xi k_2{}^\eta \varepsilon_{\xi\eta\rho)\mu}, \end{aligned} \quad (9\text{-}22)$$

ただし，$A_{(\alpha}B_{\beta)}=(1/2)\{A_\alpha B_\beta+A_\beta B_\alpha\}$，$A_{(\alpha}\eta_{\rho)(\sigma}B_{\beta)}=(1/4)\{A_\alpha\eta_{\rho\sigma}B_\beta+A_\rho\eta_{\alpha\sigma}B_\beta+A_\alpha\eta_{\rho\beta}B_\sigma+A_\rho\eta_{\alpha\beta}B_\sigma\}$ である．

(9-22) の L_1，…，L_6 はすべて発散積分である．したがって，それ自身では意味を持たない．図9-2c からの項と組み合わせて，全体がゲージ（座標変換）不変になるように定める．

図9-2c および，k_1 と k_2 を入れ替えた図からの寄与は次式で与えられる．

$$\langle T_{\mu5}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{(2k_1{}^0)^{1/2}}\frac{1}{(2k_2{}^0)^{1/2}}\varphi^{\sigma\beta}(k_1)\varphi^{\rho\alpha}(k_2)\left\{\frac{-i\chi^2}{16\cdot(2\pi)^4}\right\}T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}(k_1,k_2), \tag{9-23}$$

ただし

$$\frac{-i\chi^2}{16\cdot(2\pi)^4}T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}=-2i\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}(-1)\mathrm{Tr}\left[\frac{i\gamma(q+k_1)-m}{(q+k_1)^2+m^2}\left\{-\frac{\chi}{4}\gamma_{(\sigma}(2q+k_1)_{\beta)}\right\}\right.$$
$$\left.\times\frac{i\gamma q-m}{q^2+m^2}\left\{-\frac{\chi}{4}\gamma_{(\rho}(2q-k_2)_{\alpha)}\right\}\frac{i\gamma(q-k_2)-m}{(q-k_2)^2+m^2}i\gamma_\mu\gamma_5\right]. \tag{9-24}$$

ここで Tr は γ 行列についての対角和をとることを意味する．(9-24) に (9-19) の $\eta^{\alpha\beta}\varphi^\gamma{}_\gamma$ の項が現われなかったのは，$\eta^{\alpha\beta}$ によって γ 行列の数が少なくなり Tr によって落ちるためである．計算を簡単にするために，ゲージ条件

$$\partial^\mu\left(\varphi_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\varphi^\lambda{}_\lambda\right)=0 \tag{9-25}$$

をおく．上で述べたように $\eta_{\mu\nu}\varphi^\lambda{}_\lambda$ の項は寄与しないので，この条件式は，$k_{1\sigma}$，$k_{1\beta}$，$k_{2\rho}$，$k_{2\alpha}$ の添字を持つ k_1，k_2 は無視できることを意味する．Feynman 積分を行う場合の公式

$$\frac{1}{ABC}=2\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{[A+(B-A)x+(C-A)y]^3}$$

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{1}{(q^2-2qk+s-i\varepsilon)^3}=\frac{1}{32\pi^2(s-k^2)}$$

を用いると (9-24) の $T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}$ は図9-2a，図9-2b の寄与も合わせて

$$T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}=\frac{1}{2}(A_1k_1{}^\xi+A_2k_2{}^\xi)\{\eta_{\alpha(\beta}\varepsilon_{\xi\sigma)\rho\mu}+\eta_{\rho(\beta}\varepsilon_{\xi\sigma)\alpha\mu}\}+A_3k_{1(\rho}\eta_{\alpha)(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\sigma)\mu}$$
$$+A_4k_{2(\sigma}\eta_{\beta)(\alpha}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\rho)\mu}+(B_1k_1{}^\xi+B_2k_2{}^\xi)k_{2(\beta}\varepsilon_{\xi\sigma)(\rho\mu}k_{1\alpha)}$$
$$+B_3k_{1(\alpha}k_{1\rho)}k_{2(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\sigma)\mu}+B_4k_{2(\beta}k_{2\sigma)}k_{1(\alpha}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\rho)\mu} \tag{9-26}$$

と書き表わされる．ここで $A_i\,(i=1,2,3,4)$，B_1，B_2 には図 9-2 a，図 9-2 b からの寄与が含まれているので，これらは発積積分である．B_3，B_4 には図 9-2 a，図 9-2 b からの寄与はなく，図 9-2 c の三角形図のみから生ずるので積分は有限で，次式で与えられる（(9-29) も参照)．

$$B_3(k_1, k_2) = -B_4(k_2, k_1)$$

$$= 64\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{x^2y^2}{[k_1{}^2y(1-y)+k_2{}^2x(1-x)+2(k_1k_2)xy+m^2]}. \tag{9-27}$$

図 9-2 からも理解される Bose 対称性と呼ばれる次の性質

$$T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}(k_1, k_2) = T_{\alpha\beta\rho\sigma\mu}(k_2, k_1) \tag{9-28}$$

から関係式

$$\begin{aligned} A_1(k_1, k_2) = -A_2(k_2, k_1)\ ;\ A_3(k_1, k_2) = -A_4(k_2, k_1) \\ B_1(k_1, k_2) = -B_2(k_2, k_1)\ ;\ B_3(k_1, k_2) = -B_4(k_2, k_1) \end{aligned} \tag{9-29}$$

が導かれる．

発散積分で，したがって不定な A_i，B_1，B_2 をわれわれは次の要請によって定めよう．われわれの理論は，ゲージ変換（一般座標変換)

$$\varphi_{\mu\nu} \longrightarrow \varphi_{\mu\nu} + \partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu \quad (\varepsilon_\mu \text{ は任意微小関数}) \tag{9-30}$$

に対して不変であるべきという要請を課そう．したがって，

$$k_1{}^\sigma T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu} = k_1{}^\beta T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu} = k_2{}^\rho T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu} = k_2{}^\alpha T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu} = 0 \tag{9-31}$$

という条件式が要求される．この条件式より

$$\begin{aligned} &A_i = -(k_1k_2)B_i, \\ &B_1(k_1, k_2) = -B_2(k_2, k_1) = (k_1k_2)B_3(k_1, k_2) \end{aligned} \tag{9-32}$$

が得られ，A_i，B_1，B_2 はすべて，(9-29) で与えられた有限な $B_3(k_1, k_2)$ で表わされたことになる．ゲージ不変という要請がこの結果を導くに当って，大きな役割を果たしている．

次に図 9-2 c で $i\gamma_\mu\gamma_5$ を $2im\gamma_5$ で置き換えた Feynman 図からの寄与を求めよう．(9-24) と全く平行して計算され

$$2m\langle T_5\rangle = \frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{(2k_1{}^0)^{1/2}}\frac{1}{(2k_2{}^0)^{1/2}}\varphi^{\sigma\beta}(k_1)\varphi^{\rho\alpha}(k_2)\left\{\frac{-2imx^2}{16\cdot(2\pi)^4}\right\}T'_{\beta\alpha\sigma\rho}, \tag{9-33}$$

ただし

$$T'_{\beta\alpha\sigma\rho}=-4\int d^4q\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\frac{1}{[q^2+k_1{}^2y(1-y)+k_2{}^2x(1-x)+2(k_1k_2)xy+m^2]^3}$$
$$\times\mathrm{Tr}\{[i\gamma\{q+k_2x+k_1(1-y)\}-m][\gamma_{(\sigma}\{2q+2k_2x+k_1(1-y)\}_{\beta)}]$$
$$\times[i\gamma\{q+k_2x-k_1y\}-m][\gamma_{(\rho}\{2q-k_2(1-2x)-2k_1y\}_{\alpha)}]$$
$$\times[i\gamma\{q-k_2(1-x)-k_1y\}-m]i\gamma_5\}. \qquad (9\text{-}34)$$

を得る。

(9-33) のみではゲージ不変性は保たれない。図 9-2 a および図 9-2 b において $i\gamma_\mu\gamma_5$ を $2im\gamma_5$ で置き換えて得られる図からの寄与 $L_{\beta\alpha\sigma\rho}$ を加えてはじめてゲージ不変にできる。$L_{\beta\alpha\sigma\rho}$ は発散積分である。両者を加えたものは次のようになる。

$$T_{\beta\alpha\sigma\rho}=T'_{\beta\alpha\sigma\rho}+L_{\beta\alpha\sigma\rho}$$
$$=\frac{1}{2}C_1\{\eta_{\alpha(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\sigma)\rho}+\eta_{\rho(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\sigma)\alpha}\}$$
$$+C_2k_{2(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\sigma)(\rho\eta}k_{1\alpha)}. \qquad (9\text{-}35)$$

γ 行列の Tr の計算からわかるように C_2 には $L_{\beta\alpha\sigma\rho}$ からの寄与はなく，C_2 は (9-34) より有限積分で次のように表わされる。

$$C_2=-32i\pi^2m\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\frac{xy}{[k_1{}^2y(1-y)+k_2{}^2x(1-x)+2(k_1k_2)xy+m^2]}. \qquad (9\text{-}36)$$

発散積分である C_1 は，(9-30)，(9-31) の考察と同様にゲージ不変性の要請から

$$C_1=-(k_1k_2)C_2 \qquad (9\text{-}37)$$

となり，有限な量で表わされる。

以下，議論を簡単にするために，外部重力場は自由場の方程式を満たすものとする。すなわち

$$k_1{}^2=k_2{}^2=0. \qquad (9\text{-}38)$$

ここで，$i(k_1+k_2)^\mu T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}$ を計算すると，係数 A_1，A_2，B_1，B_2 の項のみが残り，(9-37) の関係式を伴う (9-35) の形になる。しかしその係数は，$2mT_{\beta\alpha\sigma\rho}$ と異なり

$$i(k_1+k_2)^\mu T_{\beta\alpha\sigma\rho\mu}=2mT_{\beta\alpha\sigma\rho}+\frac{\chi^2}{24\cdot(2\pi)^2}[k_{2(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\sigma)(\rho}k_{1\alpha)}$$

$$-\frac{1}{2}(k_1k_2)\{\eta_{\alpha(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\sigma)\rho}+\eta_{\rho(\beta}k_1{}^\xi k_2{}^\eta\varepsilon_{\xi\eta\sigma)\alpha}\}] \tag{9-39}$$

となり，右辺第 2 項に余分な項が現われる．Riemann-Christoffel 曲率 $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ は線形近似では

$$R_{\mu\nu\sigma\tau}=-\frac{1}{2}\chi(\partial_\nu\partial_\tau\varphi_{\mu\sigma}+\partial_\mu\partial_\sigma\varphi_{\nu\tau}-\partial_\nu\partial_\sigma\varphi_{\mu\tau}-\partial_\mu\partial_\tau\varphi_{\nu\sigma}) \tag{9-40}$$

であることに注目すると（9-39）は次のように，曲った空間でのテンソル方程式で表わされる[2]．

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}J_5{}^\mu)=2m\sqrt{-g}J_5+(1/384\pi^2)\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho}. \tag{9-41}$$

右辺第 2 項は，（9-17）で示してあったように古典論では存在しなかった項で，量子論的効果によって現われたものである．この項が**軸性量子異常項**と呼ばれる．元来，場の量子論では発散が生ずるため，不定性が存在するが，上で示したように，ゲージ不変性（一般共変性）の要求を課して計算することによって，定まった値が得られる．これが，通常のくりこみ理論に現われる発散と異なる点である．量子電気力学の場合にも，（9-41）の右辺第 2 項に相当する項が現われ，これが中性中間子 π^0 の 2 光子への崩壊に寄与し，重要な役割を演じた．Dirac 粒子の質量が $m=0$ の場合には $J_5{}^\mu$ は古典論では保存され，作用関数も，**カイラル変換**：$\psi\longrightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\psi$；$\overline{\psi}\longrightarrow\overline{\psi}e^{i\alpha\gamma_5}$ に対して不変である．量子異常項により，重力場の中ではカイラル電流 $J_5{}^\mu$ の保存則，カイラル不変性は破れる．

量子電気力学での量子異常項が中性中間子の崩壊に関して重要であったのに対して，（9-41）の第 2 項は時空の位相幾何学（トポロジー）的性質と密接な関係をもつ．この項の12倍をコンパクトな Riemann 時空で積分したものは，積分領域内の計量テンソルの連続的な変化に対して不変で，位相幾何学的な不変量（**Pontryagin 数**という）

$$P=\frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\rho} \tag{9-42}$$

になっている．さらに，次の **Atiyah-Singer の指数定理**

$$n_{(+)}-n_{(-)}=-P/24 \tag{9-43}$$

とも結びついている．ここで $n_{(+)}$，$n_{(-)}$ は

$$\left(-g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu+\frac{R}{4}\right)\psi_{(\pm)}=0, \quad \gamma_5\psi_{(\pm)}=\pm\psi_{(\pm)} \tag{9-44}$$

を満たす正負のカイラリティを持つ解の数である．このように，量子異常項が時空の位相幾何学的構造と密接な関係にあることは興味深い．

右向きの $\psi_{(+)}$ と左向きの $\psi_{(-)}$ が非対称に現われる理論では，量子異常の問題が基本粒子のゲージ理論の量子論を困難なものにする恐れがある．しかし，素粒子の統一理論のひとつである Glashow-Weinberg-Salam の弱電磁相互作用理論においては，量子異常の相殺がクォークとレプトンの間で起こり，ゲージ自由度は量子異常を生せず，矛盾のない量子論になっている．

本章では Feynman 図による方法で量子異常項を求めたが，径路積分による量子論では，異常項の出現を径路積分の測度のカイラル変換等に対する非保存性に帰着させて求める方法が藤川によって開発された[3]．この方法は (9-43) の Atiyah-Singer の指数定理とカイラル異常項との関係を，直接明らかにし，他の異常項の導出にも幅広く応用できるものである．

§9-3　重力異常項の Feynman 図による評価

§9-1 では Dirac 方程式は一般座標変換と局所 Lorentz 変換の両方に対して共変になるように Minkowski 空間から Riemann 空間へと拡張された．このとき §9-2 で示したような量子異常項が現われ保存則が破れるだけでなく，これらの共変性も破れることがある．素粒子の統一理論では $\gamma_5\psi_{(\pm)}=\pm\psi_{(\pm)}$ の性質を持つ $\psi_{(\pm)}$ で記述されるカイラルフェルミオンを基本にして出発する．ここでは時空の次元を 4 次元に限らず D 次元とする． 4 次元の γ_5 に対応する Γ で $\Gamma^2=1$ を満たす行列は奇数次元では存在しないので奇数次元でのカイラルフェルミオンは考えにくい．したがって次元 D は偶数とする．荷電共役演算子を C とすると $D=4k$ 次元では $\{C,\Gamma\}=0$ で，$D=4k+2$ 次元では $[C,\Gamma]=0$ である．右向き，左向きを示す Γ が荷電共役と可換なとき量子重力異常項が現われる．したがって，$D=2,6,10,\cdots$ 次元でこの問題が起きる．次章で述べるように超弦理論が整合的に展開される次元は $D=10$ なのでこの問題は切実である．この節では，簡単のため問題を $D=2$ 次元に限って，Feynman 図の方法で，異常項の分析を行う．一般次元での議論は Alvarez-Gaumé と Witten によって展開されている[4]．

重力異常項のとらえ方には 2 通りある．1 つは Wess-Zumino による，整合的異

常項であり［5］，他は異常項が共変的になるようにするものである．これらは無関係ではなく，Bardeen-Zumino によって代数的処法で同等性が示されている[6]．ここでは Feynman 図の方法で，対応する図にどのような条件を課したらどのような異常項が生じるかを，前節で用いたのと同様な方法で調べよう．

作用関数は，$\gamma_5=\gamma^0\gamma^1=-\gamma_0\gamma_1$ として（γ は 2 行 2 列の行列）

$$I=-\int d^2x hh^{\alpha\mu}\frac{1}{2}\left[\overline{\psi}(\gamma_\alpha\nabla_\mu-\overleftarrow{\nabla}_\mu\gamma_\alpha)\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right],\ h=\det h^\alpha{}_\mu, \tag{9-45}$$

である．ここで $h^\alpha{}_\mu$ は 2 次元空間 $(-\eta^{00}=\eta^{11}=1)$ での 2 脚場であり，添字 α は局所 Lorentz 系のものである．2 次元では $\{\gamma_\alpha,[\gamma^\gamma,\gamma^\delta]\}=0$ なので接続場 $\omega_{\gamma\delta,\mu}$ の寄与はなく

$$I=-\frac{1}{2}\int d^2x\ hh^{\alpha\mu}\left[\overline{\psi}\gamma_\alpha(\partial_\mu-\overleftarrow{\partial_\mu})\frac{1-\gamma_5}{2}\psi\right] \tag{9-45'}$$

となる．エネルギー・運動量テンソルを

$$T_\alpha{}^\mu=-\frac{1}{h}\frac{\delta I}{\delta h^\alpha{}_\mu} \tag{9-46}$$

と定義すると，

$$T_{\mu\nu}=g_{\nu\lambda}T_\alpha{}^\lambda h^\alpha{}_\mu=\frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma_\mu(x)(\partial_\nu-\overleftarrow{\partial_\nu})\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\psi \tag{9-47}$$

となる*)．

量子重力異常項を求めるために，上記の $T_{\mu\nu}$ の真空期待値を摂動で計算しよう．重力場は弱いものとして 2 脚場を

$$h^\alpha{}_\mu=\delta^\alpha{}_\mu+f^\alpha{}_\mu \tag{9-48}$$

と展開し，$f^\alpha{}_\mu$ は十分弱いものと考える．以下，添字の上げ下げは Minkowski 空間での $\eta_{\mu\nu}$，$\eta_{\alpha\beta}$ で行う．したがって μ，α は同じ種類のものとみなしてよい．§9-2 ではカイラル異常項を調べたので，局所 Lorentz 変換に関するゲージの自由度を用いて $f_{\nu\mu}=\eta_{\alpha\nu}f^\alpha{}_\mu$ が μ，ν について対称になるようにした．本節では，局所 Lorentz 変換の量子論的破れを調べるので，特別なゲージはとらず，$f_{\mu\nu}$ は反対称成分も含むものをとる．

---

*) I の中の h から生じる $T_\alpha{}^\mu$ への寄与は ψ の運動方程式によって零となる．

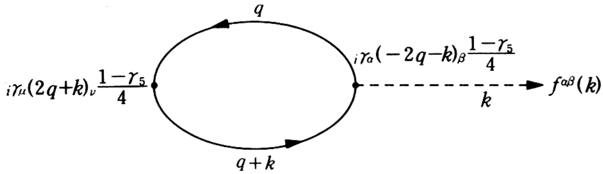


図 9-3

$T_{\mu\nu}$ の真空期待値は図 9-3 のような Feynman 図の計算になる．頂点関数，ループの運動量，外線としての重力子等は図に示した通りである．図 9-3 からの寄与は

$$\langle T_{\mu\nu}(x)\rangle = \frac{1}{4}\int\frac{d^2k}{2\pi}e^{i(kx)}f^{\alpha\beta}(k)L_{\mu\nu\alpha\beta}(k) \tag{9-49}$$

の形に書き表わされる．ただし，$f^{\alpha\beta}(x) = \int\frac{d^2k}{2\pi}f^{\alpha\beta}(k)e^{i(kx)}$ で，$L_{\mu\nu\alpha\beta}(k)$ は

$$L_{\mu\nu\alpha\beta}(k) = \int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\mathrm{Tr}\left[\gamma_\mu(2q+k)_\nu\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1}{(\gamma q)}\gamma_\alpha(2q+k)_\beta\frac{1-\gamma_5}{2}\frac{1}{(\gamma(q+k))}\right] \tag{9-50}$$

である．$L_{\mu\nu\alpha\beta}$ は最高次 2 次の発散で，運動量の積分変数の変更による任意性等を含む．$L_{\mu\nu\alpha\beta}(k)$ の一般形を定めよう．異常項に寄与するのは，$L_{\mu\nu\alpha\beta}(k)$ の内，空間反転の不変性を破る型の項である．実際，空間反転不変なものからは量子異常項は現われないことが示される．空間反転不変を破る項を $L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}$ とすると，これは次のように表わされる．

$$\begin{aligned}L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k) &= A_1\varepsilon_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}+A_2\varepsilon_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}+A_3(\varepsilon_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}+\varepsilon_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}+\varepsilon_{\nu\alpha}\eta_{\mu\beta}+\varepsilon_{\nu\beta}\eta_{\mu\alpha})\\&\quad+A_4\varepsilon_{\mu\nu}\widetilde{k_\alpha}\widetilde{k_\beta}+A_5\varepsilon_{\alpha\beta}\widetilde{k_\mu}\widetilde{k_\nu}+A_6(\widetilde{k_\mu}k_\nu+\widetilde{k_\nu}k_\mu)\eta_{\alpha\beta}\\&\quad+A_7(\widetilde{k_\alpha}k_\beta+\widetilde{k_\beta}k_\alpha)\eta_{\mu\nu}\\&\quad+A_8\{(\widetilde{k_\mu}k_\nu+\widetilde{k_\nu}k_\mu)\widetilde{k_\alpha}\widetilde{k_\beta}+(\widetilde{k_\alpha}k_\beta+\widetilde{k_\beta}k_\alpha)\widetilde{k_\mu}\widetilde{k_\nu}\}.\end{aligned} \tag{9-51}$$

ただし，$\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}$，$\varepsilon_{01}=1$，で，$\widetilde{k_\mu}$ は

$$\widetilde{k_\mu} = \varepsilon_{\lambda\mu}k^\lambda. \tag{9-52}$$

(9-51) は $\varepsilon_{\mu\nu}$ を奇数次含むもので，各項は独立で，最も一般な形である．(9-51) の各係数 $A_a(k^2)$ のうち有限なのは A_8 のみで，他は発散し不定性をもつ．§9-2 と同様に，適当な条件を課すことによって A_1，A_2，…，A_7 を A_8 によって表

わそう．

図9-3の頂点には $T_{\mu\nu}$ と外場 $f^{\alpha\beta}$ と結合する $T_{\alpha\beta}$ との2つがある．これら頂点に局所 Lorentz 不変性，一般共変性の条件を課そう．頂点 $T_{\alpha\beta}$ に対する一般共変性は

$$k^{\alpha}L^{5}{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k)=0, \tag{9-53G}$$

で表わされ，Lorentz 不変性は

$$L^{5}{}_{\mu\nu[\alpha\beta]}(k)=0 \tag{9-53L}$$

で表わされよう．同様に頂点 $T_{\mu\nu}$ に対する条件として

$$k^{\mu}L^{5}{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k)=0, \tag{9-54G}$$

$$L^{5}{}_{[\mu\nu]\alpha\beta}(k)=0. \tag{9-54L}$$

さらに，頂点 $T_{\mu\nu}$ と頂点 $T_{\alpha\beta}$ を同等に扱う Bose 対称性と呼ばれる条件として

$$L^{5}{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k)=L^{5}{}_{\alpha\beta\mu\nu}(-k) \tag{9-55}$$

をおく．これらの条件がすべて満たされるなら異常項は存在しない．

上の条件による A_a に対する制限を求めてみよう．(9-53G) を課すと，$k_{\alpha}\widetilde{k^{\alpha}}=0$ 等の恒等式を考慮して

$$A_1\varepsilon_{\mu\nu}k_{\beta}+(A_2+2A_3+A_7k^2)\widetilde{k_{\beta}}\eta_{\mu\nu}+(-2A_3+k^2A_6)(\widetilde{k_{\mu}}\eta_{\nu\beta}+\widetilde{k_{\nu}}\eta_{\mu\beta})$$
$$+(A_5+2A_6+A_8k^2)\widetilde{k_{\beta}}\widetilde{k_{\mu}}\widetilde{k_{\nu}}=0 \tag{9-56}$$

が得られる．ただし，ここで

$$\varepsilon_{\mu\beta}k_{\nu}=\widetilde{k_{\beta}}\eta_{\mu\nu}-\eta_{\beta\nu}\widetilde{k_{\mu}}\ ;\ k_{\nu}k_{\beta}=\widetilde{k_{\nu}}\widetilde{k_{\beta}}+k^2\eta_{\nu\beta} \tag{9-57}$$

を用いた．よって

$$\text{(9-53G)}\Rightarrow\begin{cases}A_1=0\ ;\ A_2+2A_3+k^2A_7=0,\\ -2A_3+k^2A_6=0\ ;\ A_5+2A_6+k^2A_8=0.\end{cases} \tag{9-58}$$

(9-53L) は

$$\text{(9-53L)}\Rightarrow\quad A_2=0,\ A_5=0. \tag{9-59}$$

同様に頂点 $T_{\mu\nu}$ に対する条件として

$$\text{(9-54G)}\Rightarrow\begin{cases}A_2=0\ ;\ A_1-2A_3+k^2A_6=0,\\ 2A_3+k^2A_7=0\ ;\ A_4+2A_7+k^2A_8=0,\end{cases} \tag{9-60}$$

$$\text{(9-54L)}\Rightarrow\quad A_1=0,\ A_4=0. \tag{9-61}$$

また，Bose 対称性から

$$\text{(9-55)}\Rightarrow\quad A_1=A_2\ ;\ A_3=0\ ;\ A_4=A_5\ ;\ A_6=A_7. \tag{9-62}$$

もし以上の条件をすべて要請すれば，A_8 として許されるのは0のみで，したが

って，他の A_a もすべて0となり異常項は現われない．0以外の A_a を導くには，上の5個の条件のうち，3個まで課せばよい．次に可能な色々の場合を考えよう．

(i)　共変的 Lorentz 異常項

まず，外線 $f^{\alpha\beta}$ と結合する $T_{\alpha\beta}$ に（9-53L），（9-53G）を課し，異常項の形を共変的にし，頂点 $T_{\mu\nu}$ に（9-54G）を課し $T_{\mu\nu}$ の Lorentz 異常項のみを見よう．(9-58)，(9-59)，(9-60) より

$$A_1 = A_2 = A_5 = 0 \quad ; \quad A_3 = -\frac{(k^2)^2}{4}A_8,$$
$$A_4 = -2k^2 A_8 \quad ; \quad A_7 = -A_6 = \frac{k^2}{2}A_8 \tag{9-63}$$

を得る．発散量 $A_1 \sim A_7$ は有限確定な値をもつ A_8 によって表わされ，$L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k)$ は有限量になる．A_8 の値については後に計算する．

この場合の Lorentz 異常項として

$$\begin{aligned} L^5{}_{[\mu\nu]\alpha\beta}(k) &= A_4 \varepsilon_{\mu\nu\widetilde{k_\alpha k_\beta}} \\ &= -2A'_8 \varepsilon_{\mu\nu\widetilde{k_\alpha k_\beta}}, \end{aligned} \tag{9-64}$$

A'_8 は次式で定義されるものである．

$$A'_8 = k^2 A_8. \tag{9-65}$$

(ii)　整合的 Lorentz 異常項

頂点関数 $T_{\alpha\beta}$ に(9-53G)を課し，Bose 対称性(9-62)をおく．Bose 対称性から $T_{\mu\nu}$ に対する一般共変性(9-54G)は自動的に(9-53G)より導かれる．(9-53G)，(9-62)より

$$\begin{aligned} &A_1 = A_2 = A_3 = A_6 = A_7 = 0, \\ &A_4 = A_5 = -A'_8 \end{aligned} \tag{9-66}$$

が導かれ $L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}$ には不定性はなくなり，Lorentz 異常項として

$$L^5{}_{[\mu\nu]\alpha\beta}(k) = -A'_8 \varepsilon_{\mu\nu\widetilde{k_\alpha k_\beta}} \tag{9-67}$$

を得る．異常項の値は共変的 Lorentz 異常項の 1/2 である．

(iii)　共変的 Einstein 異常項

頂点 $T_{\mu\nu}$ に Lorentz 共変性を課し，Einstein 異常項をみるため（9-53L），（9-54L），（9-53G）の3つの条件をおく．この結果

$$A_1 = A_2 = A_4 = A_5 = 0,$$
$$A_3 = -\frac{1}{4}k^2 A'_8 \;;\; A_6 = -A_7 = -\frac{1}{2}A'_8 \tag{9-68}$$

となり $L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}$ は定まり，Einstein 異常項として

$$\begin{aligned} k^\mu L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k) &= (-2A_3 + k^2 A_6)\widetilde{k_\nu}\eta_{\alpha\beta} + (2A_3 + k^2 A_7)(\widetilde{k_\alpha}\eta_{\beta\nu} + \widetilde{k_\beta}\eta_{\alpha\nu}) \\ &\quad + (2A_7 + k^2 A_8)\widetilde{k_\nu}\widetilde{k_\alpha}\widetilde{k_\beta} \\ &= 2A'_8 \widetilde{k_\nu}\widetilde{k_\alpha}\widetilde{k_\beta} \end{aligned} \tag{9-69}$$

を得る．ただし，ここで（9-57）等を用いた．

(iv) 整合的 Einstein 異常項

Bose 対称性と Lorentz 不変性を課し，頂点 $T_{\mu\nu}$ の Einstein 異常項をみる．Bose 対称性（9-55）と（9-53 L）を頂点 $T_{\alpha\beta}$ におく．$T_{\mu\nu}$ に対する（9-54 L）は自動的に出てくる．（9-55），（9-53 L）から

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 0,$$
$$A_6 = A_7, \tag{9-70}$$

となり，不定因子として A_6 が残り，$L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k)$ は

$$\begin{aligned} L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k) &= A_6\{(\widetilde{k_\mu}k_\nu + \widetilde{k_\nu}k_\mu)\eta_{\alpha\beta} + (\widetilde{k_\alpha}k_\beta + \widetilde{k_\beta}k_\alpha)\eta_{\mu\nu}\} \\ &\quad + A_8\{(\widetilde{k_\mu}k_\nu + \widetilde{k_\nu}k_\mu)\widetilde{k_\alpha}\widetilde{k_\beta} + (\widetilde{k_\alpha}k_\beta + \widetilde{k_\beta}k_\alpha)\widetilde{k_\mu}\widetilde{k_\nu}\} \end{aligned} \tag{9-71}$$

と書ける．右辺の 2 つの項は独立に（9-55）と（9-53 L）を満たす．Bose 対称性を満たしているので，A_7 を定数と考えると，A_6 を係数に持つ項は有効作用関数を与えるものと考えられる．よって Lagrange 関数に局所的な項を加えて，その寄与が，（9-71）の A_6 項を相殺するようにすればよい．したがって

$$L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k) = A_8\{(\widetilde{k_\mu}k_\nu + \widetilde{k_\nu}k_\mu)\widetilde{k_\alpha}\widetilde{k_\beta} + (\widetilde{k_\alpha}k_\beta + \widetilde{k_\beta}k_\alpha)\widetilde{k_\mu}\widetilde{k_\nu}\} \tag{9-72}$$

を得る．ここで後に示すように A_8 は $1/k^2$ であり，非局所的な寄与を与えるので A_6 項のようにカウンター項によって除くことはできない．（9-72）から，整合的 Einstein 異常項として

$$k^\mu L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}(k) = A'_8 \widetilde{k_\nu}\widetilde{k_\alpha}\widetilde{k_\beta} \tag{9-73}$$

を得る．この値は共変的 Einstein 異常項（9-69）の $1/2$ である．

Riemann-Christoffel の曲率テンソル $R_{\mu\nu\alpha\beta}(x)$ の Fourier 成分は

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}(k) = \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta}\widetilde{k_\lambda}\widetilde{k_\rho}f^{\lambda\rho}(k) \tag{9-74}$$

と書き表わされることに注目すると，共変的 Lorentz 異常項，共変的 Einstein 異

常項は

$$\langle T_{[\mu\nu]}\rangle = -\frac{i}{4}A'_8 R_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}, \tag{9-75}$$

$$\nabla^\mu\langle T_{\mu\nu}\rangle = \frac{i}{4}A'_8\nabla^\mu(R_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}) \tag{9-76}$$

と曲率テンソルで書くことができる．

以上の結果から，各異常項に対応する $L^5{}_{\mu\nu\alpha\beta}$ の間の相違は局所的な項によって表わされ，その形も決定される．

ここで，残っていた $A'_8 = k^2 A_8$ の評価をしよう．これを求めるため次の光円錐座標 $x^\pm$ を用いる．

$$\begin{aligned}
&x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1),\\
&\eta_{++} = \eta_{--} = 0\ ;\ \eta_{+-} = \eta_{-+} = -1,\\
&\varepsilon_{++} = \varepsilon_{--} = 0\ ;\ \varepsilon_{-+} = \varepsilon^{+-} = 1\ ;\ \varepsilon_{+-} = \varepsilon^{-+} = -1,\\
&\widetilde{k_+} = -k_+\ ;\ \widetilde{k_-} = k_-\ ;\ k^2 = -2k_+k_-\ ;\ k^+ = -k_-,\\
&\gamma_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_0 \pm \gamma_1) = \sqrt{2}\,\gamma_0\frac{1\mp\gamma_5}{2},\\
&\gamma_5\gamma_+ = \gamma_+\ ;\ \gamma_5\gamma_- = -\gamma_-.
\end{aligned} \tag{9-77}$$

(9-51) において $\mu=\nu=\alpha=\beta=+$ ととると $A_1 \sim A_7$ の項は落ちて，

$$L^5{}_{++++}(k) = 4A_8(k_+)^4 \tag{9-78}$$

となり，$L^5{}_{++++}(k)$ は有限である．一方(9-50)は γ_5 の 1 次のもののみ残るので

$$L^5{}_{++++}(k) = -\frac{1}{2}\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\frac{\{(2q+k)_+\}^2}{q^2(q+k)^2}\mathrm{Tr}[\gamma_+\gamma_5(\gamma q)\gamma_+(\gamma(q+k))]$$

となる．(9-77) の γ 行列に対する式を用いてトレースを計算すると $\mathrm{Tr}[\quad] = -4q_+(q+k)_+$ となり

$$L^5{}_{++++}(k) = 2\int\frac{d^2q}{(2\pi)^2}\int_0^1 dx\frac{(q-xk)_+\{q+(1-x)k\}_+\{2q_+ + (1-2x)k_+\}^2}{[q^2+x(1-x)k^2]^2}. \tag{9-79}$$

積分記号のもとでは $q_+q_+ \sim 1/2q^2\eta_{++}(=0)$，$(q_+)^4 \sim (q^2)^2\eta_{++}\eta_{++}(=0)$ なので，(9-79) の分子では $(k_+)^4$ のみとり出せばよく，

$$L^5{}_{++++}(k) = -2\int_0^1 dx\, x(1-x)(1-2x)^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{(k_+)^4}{[q^2+x(1-x)k^2]^2}$$

$$= -2\int_0^1 dx\, x(1-x)(1-2x)^2 \frac{i\pi(k_+)^4}{-x(1-x)k^2(2\pi)^2}$$

$$= \frac{i}{6\pi}\frac{(k_+)^4}{k^2} \tag{9-79′}$$

となり，(9-78) と比べて，次の値が得られる．

$$A_8 = \frac{i}{24\pi k^2} \text{ または } A'_8 = \frac{i}{24\pi}. \tag{9-80}$$

以上ではスピン 1/2 のカイラルフェルミオンについて述べたが，スピン 1/2 以外のカイラル場に対しても全く同様に議論できる．ただ A'_8 の値が異なるのみである．たとえばスピン 3/2 の場合は，$A'_8 = -23i/24\pi$ である．

本節では重力異常項の現われ方を見るため，2 次元時空に限って議論したが，$(4k+2)$ 次元時空でも同様に議論される．重力異常項が現われるのは，$(2k+2)$ 角形の Feynman 図からで，ここで展開したのと同じ方法で重力異常項が求められる．ψ_+ で表わされる右向きのカイラルフェルミオンと，左向きの ψ_- とは逆符号の重力異常項を与えるので，これらが常に同数あれば重力異常項は相殺される．しかし，自然界でニュートリノは左向きのものばかりである．したがって統一理論の基本粒子としては，最初から左右非対称なものから出発しなければならない．そうすると重力異常項が現われ，整合的な重力理論は作れないことになる．10次元時空での超弦理論の中には重力異常項が消えているものを作りうることが1984年に Green と Schwarz によって発見された．これが最近の超弦理論の流行の大きなきっかけである．この点については次章で述べる．

第10章　弦理論から超弦理論へ

§10-1　弦 理 論

第9章で述べたように，重力場を量子化した重力子によるくりこみ不可能な発散の困難と，重力異常項の困難を同時に解決できる可能性として，超弦理論が脚光を浴びている．まず，通常の（Bose）弦理論について述べる．

特殊相対論的な点粒子の作用関数は(1-9)で与えたように

$$I=-mc^2\int_1^2 d\tau=-mc\int_1^2(-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$$

と書かれ，$\int d\tau$ が4次元時空内の世界線の長さである．点粒子の代りに弦，あるいは「ひも」の場合には，時空内での軌跡は $d=2$ 次元の世界面であり，作用関数は世界面の面積で表わされよう(以下で，実際そうなっていることを示す)．弦の代りに，膜であれば，時空での軌跡は $d=$ 3次元の世界体になろう．さらに膜の代りに3次元球体のようなものも考えられる．それではなぜ弦が良いかを考えてみよう．点粒子の作用関数の $(mc)^{-1}$ の代りに α'，$c\int d\tau$ の代りに $\int dv\mathscr{L}$ として

$$I=\frac{1}{\alpha'}\int dv\mathscr{L} \qquad (\alpha'\text{：規格化の次元をもった定数}) \qquad (10\text{-}1)$$

とおき次元解析を行う．$\int dv\mathscr{L}$ は面積，体積等であるから $[\int dv\mathscr{L}]=L^d$，作用関数は $[I]=L^2MT^{-1}$ なので $[\alpha']=L^{d-2}M^{-1}T$ である．点粒子では $[1/\alpha']=[mc]=LMT^{-1}$ となっている．いま角運動量 J は $[J]=L^2MT^{-1}$ の元をもつが，次の様に光速度 c，物体の質量 m を用いて

$$[J]=[\alpha']^r[c]^s[m]^t$$

と表わすと，$r=1/(d-1)$，$s=t=d/(d-1)$ となり，$J\propto m^{\frac{d}{d-1}}$ となる．$d=2$ では $J\propto m^2$，であり，ハドロン*)のスピンと質量の間の関係式，$J\propto m^2$ をよく

---

*）強い相互作用に関与する素粒子でBose統計に従う中間子とFermi統計に従うバリオンからなっている．

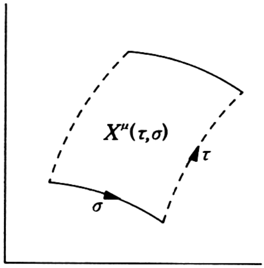


図 10-1

説明する．この事実から，1970年前後から弦の理論が研究され始めた．

後の展開のため，弦がその中で動く外の空間もD次元に拡張しよう．弦の運動の軌跡は2次元世界面なので，その上の点の位置座標は2個のパラメータσ，τの関数で表わされる．(図10-1)

$$X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma), \quad \mu = 0, 1, 2, \cdots, D-1. \tag{10-2}$$

D次元空間の計量を $-\eta^{00} = \eta^{11} = \eta^{22} = \cdots\cdots = \eta^{D-1,D-1} = 1$ とする．世界面上の近傍の2点間の微小距離dsの2乗は*)

$$ds^2 = -dX^\mu dX_\mu = -\frac{dX^\mu}{d\tau}\frac{dX_\mu}{d\tau}(d\tau)^2$$

であり，よって

$$ds = \sqrt{-\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}}d\tau = \sqrt{-g_{00}}\,d\tau \tag{10-3}$$

である．ただし

$$g_{00} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial \tau} \tag{10-4}$$

とおいた．

ここで$g_{00} < 0$とするとτは時間を表わすパラメータとみなされる．
速度ベクトルu^μは

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\dot{X}^\mu. \tag{10-5}$$

---

*)　ここではds^2の定義を4章とは逆符号にとる．

以下，次のように書く．

$$\dot{X}^{\mu}=\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\tau},\quad X'^{\mu}=\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma}. \tag{10-6}$$

パラメータ τ を適当に選び，dX^{μ} が u^{μ} と直交するようにとる．このときの dX^{μ} を $dX^{\mu}{}_{\perp}$ とすれば

$$u_{\mu}dX^{\mu}{}_{\perp}=0. \tag{10-7}$$

一方，$u_{\mu}u^{\mu}=-1$ であるから(10-7)を満たす $dX^{\mu}{}_{\perp}$ として

$$dX^{\mu}{}_{\perp}=\left[\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma}+u^{\mu}\left(u_{\nu}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma}\right)\right]d\sigma=\left[\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma}+\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\dot{X}^{\mu}\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(\dot{X}^{\nu}X'_{\nu})\right]d\sigma$$

$$=\left(X'^{\mu}-\frac{g_{01}}{g_{00}}\dot{X}^{\mu}\right)d\sigma. \tag{10-8}$$

ただし

$$g_{01}=\dot{X}^{\mu}X'_{\mu}=\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\tau}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma}. \tag{10-9}$$

u^{μ} は時間的ベクトルなので，上記の $dX^{\mu}{}_{\perp}$ は世界面に接する無限小の空間的ベクトルである．したがって，(10-8)を用いると点(τ，σ)における弦の不変長 dl は

$$dl=\sqrt{dX_{\mu\perp}dX^{\mu}{}_{\perp}}=\sqrt{X'^{\mu}X'_{\mu}-2\frac{g_{01}}{g_{00}}X'^{\mu}\dot{X}_{\mu}+\frac{g_{01}{}^{2}}{g_{00}{}^{2}}\dot{X}^{\mu}\dot{X}_{\mu}}\quad d\sigma$$

で与えられる．

ここで g_{11} を

$$g_{11}=X'^{\mu}X'_{\mu}=\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma} \tag{10-10}$$

によって導入すると，上の dl は

$$dl=(g_{11}-g_{01}{}^{2}/g_{00})^{1/2}d\sigma=\sqrt{\frac{-\det(g_{ab})}{-g_{00}}}d\sigma$$

$$\det(g_{ab})=\begin{vmatrix}g_{00} & g_{01}\\ g_{01} & g_{11}\end{vmatrix}=g_{00}g_{11}-g_{01}{}^{2}$$

となる．

弦の質量密度が一定値 χ_0 であるとすると*)，弦の静止質量を含んだ運動エネル

---

*)　χ_0 は弦の張力 T とみなしてもよい．

ギーは

$$K=\int_0^{l_1}\varkappa_0 dl=\int_0^{\sigma_1}\varkappa_0\sqrt{\frac{-\det(g_{ab})}{-g_{00}}}d\sigma \tag{10-11}$$

で表わされ，作用関数は点粒子の場合との類推から

$$I=-\int\varkappa_0 dl\int ds=-\varkappa_0\iint d\tau d\sigma\sqrt{-\det(g_{ab})}=-\varkappa_0\iint d\tau d\sigma\sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2-(\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu)(X'^\nu X'_\nu)} \tag{10-12}$$

となる．中央の式は作用関数が世界面の面積で表わされることを示している．この式が**後藤・南部の作用関数**である［1］．(10-12)は $\dot{X}^\mu$ について同次式なので第1章で述べたように，この作用関数で記述される系は拘束のある力学系である．このことは，上の I が

$$\sigma\to\sigma'=\sigma'(\tau,\sigma),\quad \tau\to\tau'=\tau'(\tau,\sigma) \tag{10-13}$$

に対して不変であることからもわかる．σ，τ の動く範囲は $-\infty<\tau<\infty$，$0\leq\sigma\leq\pi$ とする．

$L=-\varkappa_0\sqrt{(\dot{X}^\mu X'_\mu)^2-(\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu)(X'^\nu X'_\nu)}$ とおくと，変分 $\delta X^\mu(\tau,\sigma)$ のもとで

$$\delta I=-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_0^\pi d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{X}^\mu}+\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial L}{\partial X'^\mu}\right)\delta X^\mu+\int_0^\pi d\sigma\frac{\partial L}{\partial\dot{X}^\mu}\delta X^\mu\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{\partial L}{\partial X'^\mu}\delta X^\mu\Big|_0^\pi, \tag{10-14}$$

となる．$\delta X^\mu(\tau=-\infty)=\delta X^\mu(\tau=+\infty)=0$ とすると $\delta I=0$ から，次の境界条件と運動方程式が得られる．

$$\frac{\partial L}{\partial X'^\mu}=0;\qquad \sigma=0,\ \pi \tag{10-15}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{X}^\mu}+\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial L}{\partial X'^\mu}=0. \tag{10-16}$$

X^μ に共役な運動量は

$$P_\mu=\frac{\partial L}{\partial\dot{X}^\mu}=-\varkappa_0\frac{(\dot{X}^\nu X'_\nu)X'_\mu-(X'^\nu X'_\nu)\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}^\lambda X'_\lambda)^2-(\dot{X}^\lambda\dot{X}_\lambda)(X'^\rho X'_\rho)}} \tag{10-17}$$

であり，拘束条件式として次の2式が得られる．

$$P_\mu P^\mu + \varkappa_0{}^2 X'^\mu X'_\mu = 0 \tag{10-18}$$

$$P_\mu X'^\mu = 0 . \tag{10-19}$$

この拘束条件式は，作用関数が 2 次元面での一般座標変換(10-13)に対して不変であることに起因する．

(10-12)の $\sqrt{\cdots}$ の代りに，これと等価な，**Polyakov ストリング**[2]と呼ばれる

$$I = -\frac{T}{2}\int d^2\xi \sqrt{-g}\left(g^{ab}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^b}\right) \tag{10-20}$$

がよく用いられる．ここで $\xi^0 = \tau$，$\xi^1 = \sigma$ で，この空間での計量を $g_{ab}(\xi)$ とした．(10-20)と(10-12)が等価なことは，$\delta I/\delta g_{ab} = 0$ から g_{ab} を求めると(10- 4)，(10-9)，(10-10)の g_{ab} が得られ，これを(10-20)に代入すれば(10-12)になることでわかる．この作用関数は 2 次元世界面での一般座標変換(10-13)で不変であるばかりでなく Weyl 変換 $g_{ab} \to e^\phi g_{ab}$ に対しても不変である．これら 3 個の自由度により g_{ab} の物理的自由度を消すことができる．これは弦の運動の自由度は X^μ のみであることを保証するものである．

上で述べたことを用いて，ゲージ固定として，次のゲージ

$$g_{ab} = \eta_{ab} \qquad (-\eta_{00} = \eta_{11} = 1) \tag{10-21}$$

をとる．量子化においては，第 8 章で述べたようなゴーストを導入した厳密な取扱いが必要であるが，それは後に述べることにして，ここではこのままで進める．
作用関数は

$$I = -\frac{T}{2}\int d^2\xi \eta^{ab}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^b}, \quad (T：弦の張力) \tag{10-22}$$

と書かれ，運動方程式は

$$\Box X^\mu = \eta^{ab}\frac{\partial^2}{\partial \xi^a \partial \xi^b} X^\mu = 0 \tag{10-23}$$

となる．この解は

$$X^\mu = X^\mu{}_{(+)}(\tau - \sigma) + X^\mu{}_{(-)}(\tau + \sigma) \tag{10-24}$$

と右向きに動く $X^\mu{}_{(+)}$ と左向きの $X^\mu{}_{(-)}$ の和で表わされる．

境界条件(10-15)は $X'^\mu = 0$，$(\sigma = 0, \pi)$ なので，これを満たす解は，Fourier 成分で

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \frac{1}{\pi T} p^\mu \tau + i\frac{1}{\sqrt{\pi T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n}\alpha^\mu{}_n e^{-in\tau}\cos n\sigma \tag{10-25}$$

と表わされる．ここで Σ' は $n=0$ を除く意味である．(10-25)より

$$P_\mu = T\dot{X}_\mu = \frac{1}{\pi}p_\mu + \sqrt{\frac{T}{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \alpha_{\mu n}e^{-in\tau}\cos n\sigma \qquad (10\text{-}25')$$

となる．以上の解から

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi X^\mu d\sigma = x^\mu + \frac{1}{\pi T}p^\mu\tau$$

$$\int_0^\pi P_\mu d\sigma = p_\mu$$

となり，(10-25)，(10-25′)の 0 振動数モードの x^μ，p_μ は弦の幾何学的重心座標および全運動量であることがわかる．拘束条件式(10-18)，(10-19)は，

$$(\dot{X}^\mu + X'^\mu)(\dot{X}_\mu + X'_\mu) = 0 \ ; \ (\dot{X}^\mu - X'^\mu)(\dot{X}_\mu - X'_\mu) = 0 \qquad (10\text{-}26)$$

とも書かれる．(10-25)より

$$\dot{X}^\mu \pm X'^\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^\mu{}_n e^{-in(\tau\pm\sigma)} \ ; \ \left(\alpha^\mu{}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}p^\mu\right), \qquad (10\text{-}27)$$

となるので(10-26)の左辺は Fourier 成分で

$$L_m = \frac{T}{4}\int_0^\pi [e^{im(\tau+\sigma)}(\dot{X}^\mu + X'^\mu)(\dot{X}_\mu + X'_\mu) + e^{im(\tau-\sigma)}(\dot{X}^\mu - X'^\mu)(\dot{X}_\mu - X'_\mu)]d\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^\mu{}_{m-n}\alpha_{\mu n} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (10\text{-}28)$$

と書き表わされ，(10-26)の連続無限個の条件式が可算無限個の条件式で置き換えられる．L_m は **Virasoro 演算子**と呼ばれる．X_μ の実数性から

$$\alpha^\mu{}_n = (\alpha^\mu{}_{-n})^\dagger. \qquad (10\text{-}29)$$

作用関数(10-22)から，古典論における正準 Hamilton 関数を求めると

$$H = \int_0^\pi (P_\mu \dot{X}^\mu - L)d\sigma$$

$$= \frac{T}{2}\int_0^\pi (\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu + X'^\mu X'_\mu)d\sigma = L_0$$

である．

量子論へ移る過程として，次の Poisson 括弧を仮定しよう．

$$\{x^\mu,\ p_\nu\} = \delta^\mu{}_\nu,$$

$$(10\text{-}30)$$

$$\{X^\mu(\sigma), P_\nu(\sigma')\}_{\tau=\tau'} = \{X^\mu(\sigma), T\dot{X}_\nu(\sigma)\}_{\tau=\tau'} = \delta^\mu{}_\nu\delta(\sigma-\sigma').$$

これ以外の組合せの Poisson 括弧はすべて 0 である．

X^μ として(10-25)を代入すると $\alpha^\mu{}_n$ の間の Poisson 括弧として

$$\{\alpha^\mu{}_n,\ \alpha^\nu{}_m\} = -in\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu} \tag{10-31}$$

を得る．ここで

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos n\sigma\cos n\sigma' = \pi[\delta(\sigma+\sigma')+\delta(\sigma-\sigma')]$$

を用いた．L_n 間の Poisson 括弧を求めると

$$\begin{aligned}\{L_n,\ L_m\} &= -\frac{i}{4}\sum_{k,l}\Big(k\alpha^\mu{}_{n-k}\alpha_{\mu l}\delta_{k+m-l,0}+k\alpha^\mu{}_{n-k}\alpha_{\mu m-l}\delta_{k+l,0}\\&\qquad+(n-k)\alpha^\mu{}_l\alpha_{\mu k}\delta_{n-k+m-l,0}+(n-k)\alpha^\mu{}_{m-l}\alpha_{\mu k}\delta_{n-k+l,0}\Big)\\&= -\frac{i}{2}\sum_k k\alpha^\mu{}_{n-k}\alpha_{\mu k+m}-\frac{i}{2}\sum_k(n-k)\alpha^\mu{}_{n-k+m}\alpha_{\mu k}.\end{aligned} \tag{10-32}$$

右辺第 1 項で $k\to k'=k-m$ の変換を行うと，次の関係式を得る．

$$\{L_n, L_m\} = -i(n-m)L_{n+m}. \tag{10-33}$$

次に第 1 量子化を行う．Poisson 括弧 $\{A,\ B\}$ と交換関係 $[A,B]=AB-BA$ との対応は

$$\{A,B\} \Longleftrightarrow \frac{1}{i}[A,B]$$

でつけられるので(10-31)は量子論においては次のようになる．

$$[\alpha^\mu{}_n, \alpha^\nu{}_m] = n\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu}. \tag{10-34}$$

あるいは(10-29)の関係を用い次の交換関係式が得られる．

$$[\alpha^\mu{}_n, \alpha^{\nu\dagger}_m] = n\delta_{n,m}\eta^{\mu\nu}. \tag{10-34$'$}$$

この関係式および Hamilton 関数 (L_0) の表示から $\alpha^{\mu\dagger}_n$，$\alpha^\mu{}_n$ は振動子の生成・消滅演算子であることがわかる．

(10-33)は $n+m=0$ のときは，このままの形では交換関係の形に移行されない．これは(10-32)の 2 項は演算子 $\alpha^\mu{}_n$ の間の順序の関係が規定されていないので，並べ換えによっては不定になり，変換 $k\to k'=k-m$ は意味を持たなくなるからである．(10-28)の L_m の定義において $\alpha^\mu{}_n$ の順序を指定しなければならない．(10-34)から実際には L_0 のみ注意が必要になることがわかる．$T=1/\pi$ の単位をとり，L_0 の α_n 部分を，生成・消滅演算子の順序に並べた normal ordering によって

$$L_0=\frac{1}{2}p^{\mu}p_{\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{\mu}{}_{n}^{\dagger}\alpha_{\mu n}-\alpha(0) \tag{10-35}$$

とする．$\alpha(0)$ は勝手に normal ordering をとったため出てきた定数項である．

(10-34)の交換関係を用いて，(10-32)の和の部分の ordering に注意して辛抱強い計算を行うと

$$[L_n, L_m]=(n-m)L_{n+m}+\left\{\frac{D}{12}(n^3-n)+2n\alpha(0)\right\}\delta_{n+m,0} \tag{10-36}$$

が得られる．ここで $2n\alpha(0)\delta_{n+m,0}$ は L_0 を(10-35)で定義したために生じた項である．右辺第2項が量子論的効果からの寄与である．ここで別の簡単な方法でも求めてみよう．(10-36)を次式のように書く．

$$[L_n, L_m]=(n-m)L_{n+m}+A(n)\delta_{n+m,0}. \tag{10-37}$$

上式は n，m に関して反対称なので，$A(n)=-A(-n)$，$A(0)=0$ がまず得られる．$n+m+1=0$ に対する Jacobi の恒等式

$$[L_1[L_n, L_m]]+[L_n,[L_m, L_1]]+[L_m,[L_1, L_n]]=0$$

より

$$(n-m)A(1)+(m-1)A(n)+(1-n)A(m)=0,\quad n+m+1=0,$$

したがって

$$A(n+1)=\frac{(n+2)A(n)-(2n+1)A(1)}{n-1} \tag{10-38}$$

が導かれる．

これによって $A(1)$，$A(2)$ からすべての $A(n)$ が求められる．$A(n)$ は2個の未定係数を用いて n のベキで表わされるだろう．$A(n)$ の性質から次のようにおける．

$$A(n)=c_1n+c_3n^3.$$

$[L_n, L_{-n}]$ を，$\alpha^{\mu}{}_n$ の基底状態 $|0;p_\mu=0\rangle$ ではさんで計算しよう．すると

$$\langle p_\mu=0;0|[L_1, L_{-1}]|0;p_\mu=0\rangle=0$$

となる．これは L_1, L_{-1} のすべての項は $|0;p_\mu=0>$ の状態を消すからである．これに反して $[L_2, L_{-2}]$ は

$$\langle p_\mu=0;0|[L_2, L_{-2}]|0;p_\mu=0\rangle=\langle p_\mu=0;0|L_2L_{-2}|0;p_\mu=0\rangle$$

$$=\frac{1}{4}\langle p_\mu=0;0|\alpha^{\mu}{}_{1}\alpha_{\mu 1}\alpha^{\nu}{}_{-1}\alpha_{\nu-1}|0;p_\mu=0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\langle p_\mu = 0\,;\,0|\,\alpha^\mu{}_1\alpha^\nu{}_{-1}|\,0\,;\,p_\mu = 0\rangle = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2}D$$

を導びく．したがって，$n = -m = 1$，2 に対する(10-37)を基底状態ではさんだ式から c_1, c_3 に対する次式を得る．

$$0 = -2\alpha(0) + c_1 + c_3\,;\quad \frac{1}{2}D = -4\alpha(0) + 2c_1 + 8c_3.$$

よって

$$c_3 = \frac{D}{12},\quad c_1 = -\frac{1}{12}D + 2\alpha(0)$$

となり(10-36)が得られる．

拘束条件(10-26)は $L_n = 0$，$(n = 0, \pm 1, \cdots)$ となったが，これを量子論に移すには $L_n|\,\Psi\,\rangle = 0$ とおくのが常道である．しかし，(10-36)の交換関係の右辺に現われる定数項のため，$[L_n, L_{-n}]|\,\Psi\,\langle = 0$ は $|\,\Psi\,\rangle = 0$ になってしまうので，L_n のうち $n < 0$ は落とし

$$L_n|\,\Psi\,\rangle = 0,\ (n \geq 0) \tag{10-39}$$

ととる．$L_{-n} = L_n{}^\dagger$ であるから $\langle\,\Psi\,|L_n|\,\Psi\,\rangle = 0$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ で期待値は 0 である．

交換関係(10-34)の右辺に現われる $\eta^{\mu\nu}$ のため $\alpha^0{}_n$ の交換関係は $\alpha^i{}_n$，$(i = 1, 2, \cdots, D-1)$ と符号が逆になり負の確率がでてくる．電磁場の場合は，(8-17)の Gupta の条件式により，スカラー光子と，縦光子とが相殺し負の確率の問題がなくなった．今度の場合も(10-39)で $\alpha^0{}_n$ と縦波部分の $\alpha^{D-1}{}_n$ との相殺が起らないだろうか．この点については詳しく調べられ

$$D = 26\,;\quad \alpha(0) = 1 \tag{10-40}$$

の場合には横波部分 $\alpha^i{}_n\,(i = 1, 2, \cdots, D-2)$ のみが残ることが示されている．この証明は面倒なのでここでは省略する．(10-40)は別な観点からも求められている．理論がD次元空間での Lorentz 共変であるためには，角運動量テンソル $M^{\mu\nu}$ は

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho})$$

を満たさねばならない．横波ゲージをとった場合*)，これが満たされる条件として

---

*)　$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{25})$ とし，$X^+(\tau, \sigma) = \tau$ ととるゲージで**光円錐ゲージ**と呼ばれる．(9-77)を参照．

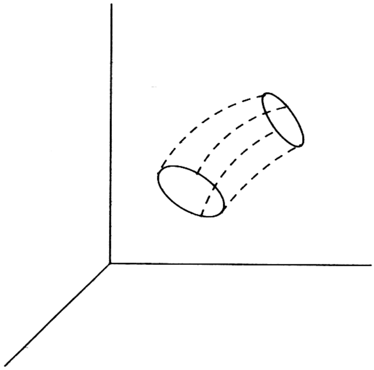


図 10-2

(10-40)が得られている．

以上では開いた弦を扱ったが図10-2のようにゴム輪のような閉じた弦の場合を考えよう．この閉じた弦が重力子と関係をもつことが次節で示される．

長さ π の開いた弦が両端でくっついた閉じた弦を考える．閉じた弦の特長は周期的条件として

$$X^{\mu}(\tau,\ \sigma)=X^{\mu}(\tau,\ \sigma+\pi) \tag{10-41}$$

を満たすべきことである．開いた弦では両端で反射があるので，(10-24)で与えた右向きの $X^{\mu}{}_{(+)}(\tau-\sigma)$ と左向きの $X^{\mu}{}_{(-)}(\tau+\sigma)$ は関係がつけられるが，閉じた弦では反射がないので両者は独立と考えなければならない．したがって

$$X^{\mu}{}_{(+)}=\frac{1}{2}x^{\mu}+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi T}p^{\mu}(\tau-\sigma)+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{n}\alpha^{\mu}{}_{n}e^{-2in(\tau-\sigma)} \tag{10-42}$$

$$X^{\mu}{}_{(-)}=\frac{1}{2}x^{\mu}+\frac{1}{2}\frac{1}{\pi T}p^{\mu}(\tau+\sigma)+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^{\mu}{}_{n}e^{-2in(\tau+\sigma)}. \tag{10-43}$$

両者の和には $1/2\pi T\cdot p^{\mu}\sigma$ は現われないのでこの解は(10-41)の周期条件を満たしている．ここで $\alpha^{\mu}{}_{n}$ と $\tilde{\alpha}^{\mu}{}_{n}$ は独立である．これらの間の交換関係式は(10-34)を導いたときと同じ方法で得られ，次のようになる．

$$\begin{aligned}&[\alpha^{\mu}{}_{n},\alpha^{\nu}{}_{m}]=[\tilde{\alpha}^{\mu}{}_{n},\tilde{\alpha}^{\nu}{}_{m}]=n\delta_{n+m,0}\eta^{\mu\nu},\\&[\alpha^{\mu}{}_{n},\tilde{\alpha}^{\nu}{}_{m}]=0.\end{aligned} \tag{10-44}$$

(10-27)に対応して閉じた弦では次式を得る．

$$\frac{1}{2}(\partial_\tau-\partial_\sigma)X^\mu{}_{(+)}=\dot{X}^\mu{}_{(+)}=\frac{1}{\sqrt{\pi T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^\mu{}_n e^{-2in(\tau-\sigma)} \tag{10-45}$$

$$\frac{1}{2}(\partial_\tau+\partial_\sigma)X^\mu{}_{(-)}=\dot{X}^\mu{}_{(-)}=\frac{1}{\sqrt{\pi T}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}^\mu{}_n e^{-2in(\tau+\sigma)}. \tag{10-46}$$

ここで

$$\alpha^\mu{}_0=\tilde{\alpha}^\mu{}_0=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi T}}p^\mu \tag{10-47}$$

である．$(\partial_\tau+\partial_\sigma)X_{(+)}{}^\mu=(\partial_\tau-\partial_\sigma)X_{(-)}{}^\mu=0$ であるから，(10-26)の条件式は

$$\dot{X}_{(+)}{}^2=\dot{X}^\mu{}_{(+)}\dot{X}_{\mu(+)}=0\ ;\ \dot{X}_{(-)}{}^2=\dot{X}^\mu{}_{(-)}\dot{X}_{\mu(-)}=0 \tag{10-48}$$

である．$\dot{X}_{(+)}{}^2$，$\dot{X}_{(-)}{}^2$ の Fourier 成分は

$$\begin{aligned}L_n&=\frac{T}{2}\int_0^\pi e^{2in(\tau-\sigma)}\dot{X}_{(+)}{}^2d\sigma=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha^\mu{}_{n-m}\alpha_{\mu m}\\ \widetilde{L}_n&=\frac{T}{2}\int_0^\pi e^{2in(\tau+\sigma)}\dot{X}_{(-)}{}^2d\sigma=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\tilde{\alpha}^\mu{}_{n-m}\tilde{\alpha}_{\mu m}\end{aligned} \tag{10-49}$$

となり付加条件は次式で与えられる．

$$L_n|\Psi\rangle=0,\quad \widetilde{L}_n|\Psi\rangle=0,\ n\geq 0. \tag{10-50}$$

次に質量のスペクトラムを定める式を求めるため，Hamilton 関数を書くと

$$\begin{aligned}H&=\int_0^\pi(\dot{X}^\mu P_\mu-L)d\sigma=\frac{T}{2}\int_0^\pi(\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu+X'^\mu X'_\mu)d\sigma\\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\alpha^\mu{}_{-n}\alpha_{\mu n}+\tilde{\alpha}^\mu{}_{-n}\tilde{\alpha}_{\mu n})=2(L_0+\widetilde{L}_0)\end{aligned} \tag{10-51}$$

となるので，

$$(L_0+\widetilde{L}_0)|\Psi\langle=\left\{\frac{1}{4}p_\mu p^\mu+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^{\mu\dagger}{}_n\alpha_{\mu n}+\tilde{\alpha}^{\mu\dagger}{}_n\tilde{\alpha}_{\mu n})-2\alpha(0)\right\}|\Psi\rangle=0 \tag{10-52}$$

から質量スペクトラムを求めるのが自然である．ここで p^μ は(10-47)で，張力の単位を $T=1/\pi$ にした．(10-52)と独立な

$$(L_0-\widetilde{L}_0)|\Psi\rangle=(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{\mu\dagger}{}_n\alpha_{\mu n}-\tilde{\alpha}^{\mu\dagger}{}_n\tilde{\alpha}_{\mu n})|\Psi\rangle=0 \tag{10-53}$$

から $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{\mu\dagger}{}_n\alpha_{\mu n}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}^{\mu\dagger}{}_n\tilde{\alpha}_{\mu n}$ を得る．(10-53)の条件は，$L_0-\widetilde{L}_0\sim$

$\int X'(\sigma)P_\mu(\sigma)d\sigma$ であり，$L_0-\widetilde{L}_0$ は σ 方向への移動演算子なので，σ の原点をどこにとってもよいという当然の条件式である．開いた弦の質量スペクトラムを定める方程式は(10-35)の L_0 によって $L_0|\Psi\rangle=0$ で与えられる．

§10-2 重力子と弦理論の関係

閉じた弦での質量スペクトラムを定める方程式は(10-52)で与えられる．ここで

$$n_{(+)}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{\mu\dagger}_{n}\alpha_{\mu n}\ ;\ n_{(-)}=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}^{\mu\dagger}_{n}\tilde{\alpha}_{\mu n} \tag{10-54}$$

とおき，(10-53)を考慮し，(10-40)の $\alpha(0)=1$ と単位をとると，$n_{(+)}=n_{(-)}=0$ の基底状態 $|0\rangle$ に対しては，弦の質量 $M^2=-p_\mu p^\mu$ は

$$M^2|0\rangle=4\{0-2\alpha(0)\}|0\rangle=-8|0\rangle \tag{10-55}$$

で，質量が $M^2=-8$ のタキオンと呼ばれる状態が対応する．次の励起状態は

$$n_{(+)}=n_{(-)}=1\ ;\ \alpha^{\mu\dagger}_{n=1}\tilde{\alpha}^{\nu\dagger}{}_{n=1}\tilde{\alpha}^{\nu\dagger}_{n=1}|0\rangle \tag{10-56}$$

であり，この質量は

$$M^2|n_{(\pm)}=1\rangle=4\{2-2\alpha(0)\}|n_{(\pm)}=1\rangle=0|n_{(\pm)}=1\rangle \tag{10-57}$$

で0になる．(10-56)の μ，ν についての対称状態は，質量0の2階対称テンソル場に対応するものとみなされ，この意味で閉じた弦は重力子を含んでいると考えられる．実際に重力子を含んでいることを示すには，第2量子化した弦の場の理論を考えねばならない．ここで参考までに開いた弦では，基底状態は $M^2=-2$ のタキオン，次の励起状態が質量0の Yang-Mills 場である．

これから，閉じた弦の共変ゲージでの場の理論を考えよう．第1章の相対論的点粒子の場合に，拘束条件(1-18)からスカラー場の方程式を出したようにすればよかろう．すなわち，弦の状態 $|\Psi\rangle$ を場の演算子 $\Psi(x)$ と考え，運動方程式が拘束条件式(10-50)になるように作用関数を作る．しかし，1つの場の変分からは1個の運動方程式しか導かれないから，(10-50)の無限個の条件式を直接に場の変分と関係づけることはほとんど不可能であろう．ふたたび，§8-1で重力場の量子化に際して用いた BRST 変換の生成演算子 Q_B による付加条件を思い出そう．そこでは $Q_B|\text{phys}\rangle=0$ が自由場の場合を考えれば Gupta の条件 $(\partial_\mu A^\mu)^{(+)}|\text{phys}\rangle=0$ と同等な無限個の条件式(8-53)となった．このことから弦理論においても，ゴーストを導入し BRST 変換による共変的第1量子化をし，第2量子化へ移るのが妥当

であろう．事実，(10-21)のゲージ固定をしたが，これを正確に Lagrange 形式で行うためには，補助場が必要である．

BRST 変換およびゴーストを用いて弦の共変的量子化を行ったのは加藤・小川である［3］．この方法の概略をのべておこう．

$\tilde{g}^{ab}=\sqrt{-g}\,g^{ab}$ は $\det(\tilde{g}^{ab})=-1$ であるから自由度が 2 になるが，これを自由度 3 のまま扱うため

$$\mathscr{L}_0=-\frac{T}{2}\tilde{g}^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu+E\{\det(\tilde{g}^{ab})+1\} \tag{10-58}$$

と補助場 E (スカラー密度)を導入しておく．2 次元世界面での一般座標変換 $\xi^a\to\xi'^a=\xi^a+\delta\xi^a$，($\delta\xi^a$ は無限小)，に対して $\mathscr{L}_0$ の変化は $\delta\mathscr{L}_0=-\partial_a(\delta\xi^a\mathscr{L}_0)$ となり，作用関数は不変である*)．第 8 章で BRST 変換を導入したように，ξ^a に対する BRST 変換は $\delta\xi^a=\varepsilon^a(\tau,\sigma)$ の ε^a をゴースト C^a で置き換える．FP ゴーストの変換性は BRST 変換 δ_B が $\delta_B{}^2=0$ になるように次式で定義される．

$$\delta_B C^a=-\lambda C^b\partial_b C^a. \tag{10-59}$$

$\tilde{g}^{ab}$ を

$$\tilde{g}^{ab}=\begin{pmatrix}A_1+A_2 & A_0\\ A_0 & A_1-A_2\end{pmatrix}$$

とおく．ゲージ固定および FP ゴーストの Lagrange 関数は，($\overline{C}_a$ は反ゴースト)

$$\lambda(\mathscr{L}_{GF}+\mathscr{L}_{FP})=-i\delta_B(\overline{C}_0A_0+\overline{C}_1A_1)\,;\ \delta_B\overline{C}_a=\lambda iB_a,\ \delta_B B=0 \tag{10-60}$$

によって定められる．このままでは $\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_{GF}+\mathscr{L}_{FP}$ は形が複雑なので，B_0，B_1，E を変数変換し次の形にする［3］，

$$\mathscr{L}=-\frac{T}{2}\eta^{ab}\partial_a X^\mu\partial_b X_\mu-i\overline{C}_0(\partial_1C^0-\partial_0C^1)+i\overline{C}_1(\partial_0C^0-\partial_1C^1)$$
$$+E(1-A_2{}^2)+B_0A_0+B_1A_1. \tag{10-61}$$

---

*) 各変数の変換は Lie 微分の意味で

$$\delta X^\mu=-\partial_a X^\mu\cdot\delta\xi^a$$
$$\delta\tilde{g}^{ab}=\tilde{g}^{ac}\partial_c\xi^b+\tilde{g}^{cb}\partial_c\delta\xi^a-\partial_c(\tilde{g}^{ab}\delta\xi^c)$$
$$\delta\det(\tilde{g}^{ab})=-\partial_c\det(\tilde{g}^{ab})\cdot\delta\xi^c,\quad \delta E=-\partial_a(E\delta\xi^a)$$

である．

補助場の方程式は

$$A_0 = A_1 = A_2{}^2 - 1 = B_0 = B_1 = E = 0$$

となるので$\mathfrak{L}$は実質上，X^μ，C^a，$\overline{C}_a$のみで表わされ，補助場A_a，B_a，Eは除いて考えられる．BRST 荷電Q_Bは Noether 電流から求められ次のようになる．

$$Q_B = \int_0^\pi d\sigma\Big[-\frac{T}{2}C^0(\dot{X}^\mu\dot{X}_\mu + X'^\mu X'_\mu) - TC^1\dot{X}^\mu X'_\mu$$

$$+ i(C^a\partial_a C^0\cdot\overline{C}_1 + C^a\partial_a C^1\cdot\overline{C}_0)\Big]. \qquad (10\text{-}62)$$

X^μの右向きと左向きの$X^\mu{}_{(+)}$，$X^\mu{}_{(-)}$を(10-42)のように Fourier 成分に分けたのに対応して，C^a，$\overline{C}_a$も右向き，左向きに分け Fourier 成分で書こう．
Lagrange 関数から定まるC^aの方程式

$$\partial_1 C^0 - \partial_0 C^1 = 0,\quad \partial_0 C^0 - \partial_1 C^1 = 0$$

から$C(\sigma) = C^0 - C^1$，$\widetilde{C}(\sigma) = C^0 + C^1$とおくと

$$(\partial_0 + \partial_1)C(\sigma) = 0,\quad (\partial_0 - \partial_1)\widetilde{C}(\sigma) = 0$$

が導かれる．したがって，$C(\sigma)$は右向き，$\widetilde{C}(\sigma)$は左向きである．周期的条件のもとで解は

$$C(\sigma) = C^0 - C^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2in(\tau-\sigma)}$$

$$\widetilde{C}(\sigma) = C^0 + C^1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n e^{-2in(\tau+\sigma)} \qquad (10\text{-}63)$$

と表わされる．$\overline{C}_a$についても同様の考察から

$$\overline{C}(\sigma) = \overline{C}_0 - \overline{C}_1 = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n e^{-2in(\tau-\sigma)}$$

$$\overline{\widetilde{C}}(\sigma) = \overline{C}_0 + \overline{C}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\tilde{c}}_n e^{-2in(\tau+\sigma)} \qquad (10\text{-}64)$$

とする．ただし，c_n，$\tilde{c}_n$，$\bar{c}_n$，$\overline{\tilde{c}}_n$の$n=0$成分は 2 個の Grassmann 数，c，$\bar{c}$を用いて次式で定義される*)．

---

*) この定義によって$n=0$成分の演算子は反交換関係(10-67)を満たす．

$$c_0 = c - \frac{1}{2}\partial/\partial\bar{c}\,;\ \tilde{c}_0 = c + \frac{1}{2}\partial/\partial\bar{c}\,;$$
$$\bar{c}_0 = \frac{1}{2}\partial/\partial c - \bar{c}\,;\ \tilde{\bar{c}}_0 = \frac{1}{2}\partial/\partial c + \bar{c}. \tag{10-65}$$

エルミート性から

$$c_n{}^\dagger = c_{-n},\ \ \tilde{c}_n{}^\dagger = \tilde{c}_{-n},\ \ \bar{c}_n{}^\dagger = \bar{c}_{-n},\ \ \tilde{\bar{c}}_n{}^\dagger = \tilde{\bar{c}}_{-n} \tag{10-66}$$

が得られ，交換関係としては，$\alpha^\mu{}_n$，$\tilde{\alpha}^\mu{}_n$ に対する(10-44)に対応して

$$\{\bar{c}_n, c_m\} = \{\tilde{\bar{c}}_n, \tilde{c}_m\} = \delta_{n+m,0},\ \text{他は}\ 0. \tag{10-67}$$

(10-62)の Q_B は

$$Q_B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} :c_{-n}\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\alpha^\mu{}_{n-m}\alpha_{\mu m} + (n+m)\bar{c}_{n-m}c_m\right) + \alpha(0)\delta_{n,0}\right\}$$
$$+\tilde{c}_{-n}\left\{-\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\tilde{\alpha}^\mu{}_{n-m}\tilde{\alpha}_{\mu m} + (n+m)\tilde{\bar{c}}_{n-m}\tilde{c}_m\right) + \alpha(0)\delta_{n,0}\right\}: \tag{10-68}$$

と書かれる：…：は演算子について normal ordering をとることを意味する．ここで $\delta_B{}^2 = 0$ に対応する

$$Q_B{}^2 = 0 \tag{10-69}$$

を，normal ordering を一貫してとることに注意し計算すると，$D = 26, \alpha(0) = 1$ の条件が再びでてくる．

Q_B から $n = 0$ の成分 c_0，$\bar{c}_0$，$\tilde{c}_0$，$\tilde{\bar{c}}_0$ を含むものを特別にとりだし，次のように書こう

$$Q_B = cL + \frac{1}{2}(\partial/\partial c)(m_{(+)} + m_{(-)})$$
$$+\frac{1}{2}(\partial/\partial\bar{c})(n_{(+)} - n_{(-)}) - \bar{c}(m_{(+)} - m_{(-)}) + \hat{Q}_B. \tag{10-70}$$

ここで $\hat{Q}_B$ は c_0，$\bar{c}_0$ を全く含まない項を表わし，

$$L = -\frac{1}{4}p_\mu p^\mu - (n_{(+)} + n_{(-)}) + 2$$
$$n_{(+)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha^\mu{}_{-n}\alpha_{\mu n} + n(c_{-n}\bar{c}_n + \bar{c}_{-n}c_n)\right\} \tag{10-71}$$

$$n_{(-)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\tilde{\alpha}^{\mu}{}_{-n}\tilde{\alpha}_{\mu n}+n(\tilde{c}_{-n}\tilde{\tilde{c}}_{n}+\tilde{\tilde{c}}_{-n}\tilde{c}_{n}\right\}$$

$$m_{(+)}=\sum_{n=1}^{\infty}2nc_{-n}c_{n}\ ;\ m_{(-)}=\sum_{n=1}^{\infty}2n\tilde{c}_{-n}\tilde{c}_{n}$$

である．この Q_B を用いて物理的状態は

$$Q_B|\Psi\rangle=0 \tag{10-72}$$

で規定される．この条件に $\bar{c}_0|\Psi\rangle=\tilde{\tilde{c}}_0|\Psi\rangle=0$ を加えることによって，状態 $|\Psi\rangle$ は(10-50)の $L_n|\Psi\rangle=0$，$\widetilde{L}_n|\Psi\rangle=0$ で満たされる横波状態のみを含んで，非物理的状態を含まぬことが加藤・小川によって示された［3］．

自由な弦の場の理論に移ろう．光円錐ゲージの場合の弦の場の理論は，弦理論の初期の段階で，既に Kaku（賀来）・吉川によって与えられていた（そこでは弦の相互作用まで導入された）［4］．ここでは明白な Lorentz 共変性を保つ形式について述べる．そのためには，既に述べたように加藤・小川による BRST 変換を用いるのが適切である．この方法で，自由な閉じた弦の場の作用関数を求めたのは Siegel［5］である．彼は，点粒子に対する BRST 形式，および(10-60)の作り方から類推し次式を得た．

$$I=\int dc\,d\bar{c}\,dZ\delta_B\left(-\Phi\bar{c}[c,\frac{\partial}{\partial c}]\Phi\right). \tag{10-73}$$

Z は $X_\mu(\sigma)$，および c，$\bar{c}$ を除いた $C(\sigma)$，$\overline{C}(\sigma)$，$\widetilde{C}(\sigma)$，$\tilde{\tilde{C}}(\sigma)$ をまとめて書いたものである．ここで

$$\delta_B\Phi=Q_B\Phi\ ;$$

$$\{\bar{c}[c,\frac{\partial}{\partial c}],Q_B\}=2\bar{c}\left[cL-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial c}(m_{(+)}+m_{(-)})\right]+\frac{1}{2}[c,\frac{\partial}{\partial c}](n_{(+)}-n_{(-)}) \tag{10-74}$$

に注意し，Φ を，c，$\bar{c}$ について

$$\Phi[Z,c,\bar{c}]=\phi[Z]+c\psi[Z]+\bar{c}\hat{\psi}+\bar{c}c\hat{\phi} \tag{10-75}$$

と展開し，Grassmann 数 c，$\bar{c}$ について積分しよう．$\int dcc=1$，$\int dc=0$ から

$$I=\int dZ\Big\{2\phi L\phi+\psi(m_{(+)}+m_{(-)})\psi+\hat{\phi}(n_{(+)}-n_{(-)})\phi+\hat{\psi}(n_{(+)}-n_{(-)})\psi\Big\} \tag{10-76}$$

を得る．この式の右辺第 3，4 項は $\hat{\phi}$，$\hat{\psi}$ を Lagrange 乗数場とみると，条件式

(10-53)のゴーストを含んだ拡張になっている．また，第1項は弦の Hamilton 関数(10-51)にゴーストの寄与が加わったもので，第2項には運動量は含まれていない．

いま，Φ を Fourier 変換した形の中で，$C(\sigma)$，$\overline{C}(\sigma)$ を共役な運動量 $i\Pi\overline{C}(\sigma)$，$i\Pi C(\sigma)$ で置き換えることにする*)．c_n の零モード c_0 も，(10-65)の代りに，$\bar{c}$ と π_c により次のように表わす．

$$c_0=\frac{\partial}{\partial\bar{c}}+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\pi_c}\ ;\ \tilde{c}_0=\frac{\partial}{\partial\bar{c}}-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\pi_c}\ ;\ \bar{c}_0=\frac{1}{2}\bar{c}-i\pi_c\ ;\ \tilde{\tilde{c}}_0=\frac{1}{2}\bar{c}+i\pi_c. \tag{10-65$'$}$$

(10-70)の Q_B は

$$Q_B=\frac{\partial}{\partial\bar{c}}L+\frac{1}{2}\bar{c}(m_{(+)}+m_{(-)})-\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\pi_c}(n_{(+)}-n_{(-)})$$
$$-i\pi_c(m_{(+)}-m_{(-)})+\hat{Q}_B \tag{10-70$'$}$$

となる．Φ を

$$\Phi=-\bar{c}\phi+\psi+\bar{c}\pi_c\hat{\psi}+i\pi_c\hat{\phi} \tag{10-75$'$}$$

と展開すると，自由な弦の場の作用関数(10-76)は次のような簡単な形**)

$$I=2\int dZd\bar{c}d\pi_c\cdot\pi_c\Phi Q_B\Phi \tag{10-77}$$

から得られることが，京都グループ(HIKKO；畑，伊藤，九後，国友，小川)[6]や Witten [7] らによって導かれた．彼らはさらに自由場のみでなく，相互作用項として $1/3\cdot g\Phi^3$ も導入した．これらの点については，本書ではこれ以上立入らない．

ゴースト数 n_{FP} を次のように規定する．$c_n^\dagger$，$\tilde{c}_n^\dagger$，π_c には＋1，反ゴーストの $\bar{c}_n^\dagger$，$\tilde{\tilde{c}}_n^\dagger$，$\bar{c}$ には－1を付与し，Φ の n_{FP} は－1とする．Q_B（この n_{FP} は＋1）のベキ零性から

$$\delta_B\Phi=Q_B\Lambda \tag{10-78}$$

の変換で(10-77)の I は不変である．Λ は $X^\mu(\sigma), C(\sigma), \overline{C}(\sigma), \widetilde{C}(\sigma), \widetilde{\widetilde{C}}(\sigma)$ の汎関数で n_{FP} は－2である．

(10-77)から実際に重力子に対応するものが得られることをみよう．汎関数 Φ，

---

*) たとえば $\int dce^{i\pi_c c}(\phi+c\psi)=-i\pi_c\phi+\psi\Longrightarrow-\bar{c}\phi+\psi$

**) (10-77)の π_c は計量として導入し，$\int d\pi_c\pi_c=1$ になるようにとった．

Λの特殊な場合として，(10-56)のようなDiracのブラ・ケット表示をとり，$\boldsymbol{\Phi}$の中のϕ部分のみを考えて，次のようにとろう．

$$|\Phi\rangle=-\bar{c}\Big[\varphi(x)|0\rangle+\Big\{\tilde{\varphi}_{\mu\nu}(x)(\alpha^{\mu}{}_{1}^{\dagger}\alpha^{\nu}{}_{1}^{\dagger})^{(s)}|0\rangle+A_{\mu\nu}(x)(\alpha^{\mu}{}_{1}^{\dagger}\alpha^{\nu}{}_{1}^{\dagger})^{(a)}|0\rangle$$

$$+\tilde{\eta}(x)(c_1{}^{\dagger}\bar{c}_1{}^{\dagger})^{(s)}|0\rangle\Big\}+\cdots\Big]+\cdots \qquad (10\text{-}79)$$

$$|\Lambda\rangle=i\bar{c}\Big[\varepsilon_{\mu}(x)(\bar{c}_1{}^{\dagger}\alpha^{\mu}{}_{1}^{\dagger})^{(s)}|0\rangle+A_{\mu}(x)(\bar{c}_1{}^{\dagger}\alpha^{\mu}{}_{1}^{\dagger})^{(a)}|0\rangle+\cdots\Big]+\cdots. \qquad (10\text{-}80)$$

ここで

$$(\alpha^{\dagger}\beta^{\dagger})^{(s)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^{\dagger}\tilde{\beta}^{\dagger}+\tilde{\alpha}^{\dagger}\beta^{\dagger})\,;\,(\alpha^{\dagger}\beta^{\dagger})^{(a)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^{\dagger}\tilde{\beta}^{\dagger}-\tilde{\alpha}^{\dagger}\beta^{\dagger})$$

で，$\tilde{\beta}$と～が付いた生成演算子は左向きのもの，～がないのは右向きである．$|\Phi\rangle$，$|\Lambda\rangle$の展開係数$\varphi(x)$，$\tilde{\varphi}_{\mu\nu}(x)$，$\varepsilon_{\mu}(x)$等は弦の重心座標$x^{\mu}$の関数である．(10-79)の第1項は$n_{(\pm)}=0$，で，第2項の$\{\cdots\}$は$n_{(\pm)}=1$，である．$\hat{Q}_{\mathrm{B}}$の中の項

$$\hat{Q}_{\mathrm{B}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}i\sum_{n=1}^{\infty}\Big[p^{\mu}(\alpha_{\mu n}^{+}c_n-c_n{}^{+}\alpha_{\mu n})+p^{\mu}(\tilde{\alpha}_{\mu n}^{+}\tilde{c}_n-\tilde{c}_n^{+}\tilde{\alpha}_{\mu n})\Big]+\cdots$$

を考慮すると(10-78)は

$$\delta\tilde{\varphi}_{\mu\nu}(x)=\partial_{\mu}\varepsilon_{\nu}(x)+\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu}(x)\,;\;\delta A_{\mu\nu}(x)=\partial_{\mu}A_{\nu}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}(x),$$
$$\delta\varphi(x)=0,\qquad \delta\tilde{\eta}(x)=\partial^{\mu}\varepsilon_{\mu}(x) \qquad (10\text{-}81)$$

となりIは

$$I=\int dx\Big[\frac{1}{2}\varphi(\Box+8)\varphi+\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^{\mu\nu}\Box\tilde{\varphi}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}A^{\mu\nu}\Box A_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\tilde{\eta}\Box\tilde{\eta}+\cdots\Big] \qquad (10\text{-}82)$$

と表わされる．

ここで

$$\tilde{\varphi}_{\mu\nu}(x)=\varphi_{\mu\nu}(x)+\eta_{\mu\nu}\eta(x)\,;\quad \tilde{\eta}(x)=\eta(x)+\frac{1}{2}\varphi^{\lambda}{}_{\lambda}(x) \qquad (10\text{-}83)$$

の変換をすると

$$I=\int dx\left[\frac{1}{2}\varphi(\Box+8)\varphi+\frac{1}{2}\varphi^{\mu\nu}\Box\varphi_{\mu\nu}-\frac{1}{4}\varphi^{\lambda}{}_{\lambda}\Box\varphi^{\lambda}{}_{\lambda}+\frac{D-2}{4}\eta\Box\eta\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}A_{\mu\nu}\Box A^{\mu\nu}+\cdots\right] \qquad (10\text{-}84)$$

となり，ゲージ変換は

$$\delta\varphi_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu\varepsilon_\nu(x)+\partial_\nu\varepsilon_\mu(x),\quad \delta A_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x),$$
$$\delta\varphi(x)=\delta\eta(x)=0 \qquad (10\text{-}85)$$

となる．$\varphi_{\mu\nu}$ に対する Lagrange 関数は(8-59′)での $\alpha=1$ のゲージのものと一致し，重力子を確かに表わしている．$A_{\mu\nu}$ は反対称テンソルゲージ場と呼ばれ(10-84)の作用関数は，$A_{\mu\nu}$ の $\alpha=1$ ゲージでのものになっている．

以上で閉じた弦には，重力子が含まれていることはわかったが，あくまで自由な重力子である．一般相対論におけるような重力子との相互作用が含まれているかどうかを調べることが重要である．この問題は弦理論の初期の段階で米谷によって明らかにされた［8］．弦の張力 T を無限大にすれば弦の拡がりは零になり粒子になる．スカラー場との相互作用をとり入れた Virasoro-Shapiro 型の弦については，その散乱振幅が与えられていたので，これを用いて $T\to\infty$ における散乱振幅が Einstein の一般相対性理論の tree 近似での散乱振幅と実際に対応していることを米谷が示した．したがって，低いエネルギーの領域では，弦理論は一般相対性理論での重力をその一部に含んでいるといえる．

§10-3　超 弦 理 論

前節の(10-55)で示したように閉じた弦の質量スペクトラムは，$M^2=-8$ のように，通常タキオンという名で呼ばれている虚数質量の粒子を含んでいる．虚数質量の粒子は一般に不安定な状態であるから，このような状態をなくして矛盾のない理論を得る目的のため，Fermi 場と Bose 場との入れ換えで理論が対称になるように組み立てる超対称性の概念が導入されている．

重力場に関しては，最初，4 次元時空におけるスピン 2 の通常の重力子とスピン 3/2 の Fermi 粒子(グラビティノーと呼ばれる)を組にし，Bose・Fermi 間の対称性を持たせた超重力理論が1976年に提唱された．この理論では，光子が重力子のループを媒介として散乱される図10-3のような Feynman 図に現われる発散を，超対称のパートナーとして導入したスピン 3/2 のグラビティノーのループを重力子と

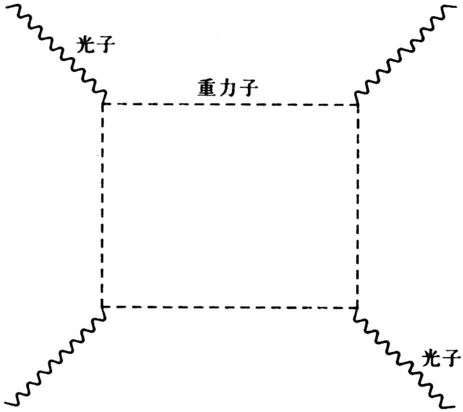


図 10-3

同時に考えて，図10-4を取り入れることによって，除去できることが示されている*)．このように無限大の発散の除去に対して，ある程度の有効性が示されたものの，発散問題の解決にまでは至らず，より根本的な変革が必要とされる．その１つの候補が弦理論に超対称性を導入した超弦理論である．上で述べた超重力理論も，超弦理論の成分の１つとして含まれているべきである．

超弦理論の解説が本書の目的ではないので，その詳細は他にゆずり，大まかな説明に限ることにする．

Fermi 場と Bose 場との間の対称性を持った超弦は，模型的にはスピンを持った粒子が弦状につながったものと考えられる．したがって超弦を記述する力学変数は，超弦の軌跡の世界面上の点の座標 $X^{\mu}(\tau,\sigma)$ と，その点に分布しているスピンを表わす $S^{Aa}(\tau,\sigma)$ である．超弦が矛盾なく量子化できるためには，時空は10次元でなければならない．§10-1の Bose 弦では26次元であったが，スピン自由度のため時空は10次元でよい．したがって X^{μ} の μ は０，１，…，９であり，S^{Aa} の a は10次元時空のスピノールの成分で１，２，…，32である．

以下，便宜上§10-1で述べた光円錐ゲージ(横波ゲージ)で考える．S^{Aa} の A は，２次元スピノールの成分とみることができる．光円錐ゲージをとったので X^{μ} の横波部分 $X^{i}(i=1,\ \cdots,\ 8)$ の数は８となり，Majorana-Weyl スピノールの独立な成分もそれと等しくして超対称の組をつくらねばならない．それは，光円錐ゲージ

*) 超重力理論については参考文献[９]を参照．また超弦理論の詳しい書は文献[10]．

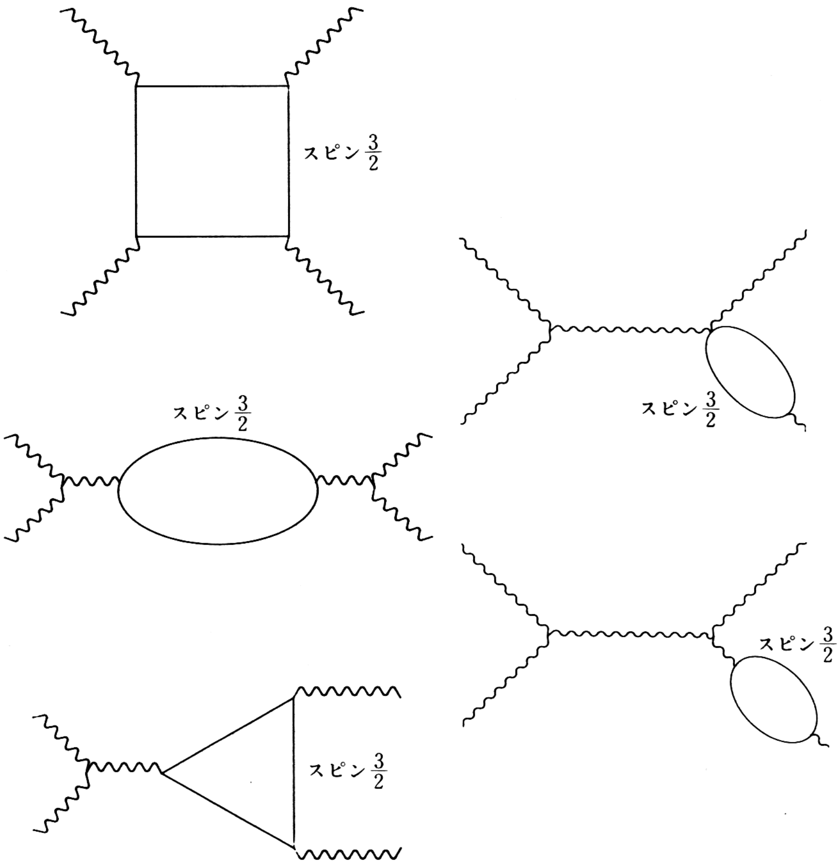


図 10-4

条件 $1/\sqrt{2}\cdot(\gamma^0+\gamma^9)S=0$ と「右巻き」か「左巻き」かどちらかであるという条件式 $1/2\cdot(1\pm\gamma_{11})S=0$，$(\gamma_{11}=\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_9)$ を置くことによってなされる．光円錐ゲージでの作用関数として（$T=1/\pi$ とえらんで）

$$I=-\frac{T}{2}\int d^2\xi\left(\frac{\partial X^i}{\partial\xi^a}\frac{\partial X_i}{\partial\xi_a}-\frac{i}{2}\bar{S}\gamma^{(-)}\rho^a\frac{\partial}{\partial\xi^a}S\right),\ (\xi^0=\tau,\ \xi^1=\sigma). \quad (10\text{-}86)$$

ここで

$$\bar{S}^{Aa}=\sum_{B,b}S^{\dagger Bb}(\gamma^0)^{ba}(\rho^0)^{BA}, \quad (10\text{-}87)$$

また，

$$\gamma^{(-)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^0-\gamma^9)=-\gamma_{(+)}\ ;\ \ \rho^0=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix};\ \rho^1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

理論が超対称性を持つとは，(10-86)の作用関数が次の超対称変換

$$\delta X^i=(p^{(+)})^{-1/2}\bar{\varepsilon}\gamma^i S \tag{10-88}$$

$$\delta S=i(p^{(+)})^{-1/2}\gamma_{(-)}\gamma_i(\rho_a\partial^a X^i)\varepsilon \tag{10-89}$$

に対して，適当な境界条件のもとで不変になることである*)．ここで $p^{(+)}=1/\sqrt{2}\cdot(p^0+p^9)$ でパラメータ ε^{Aa} は10次元時空での反可換な Majorana-Weyl スピノールである．Bose 的な X^i と Fermi 的な S が ε^{Aa} を介して移り替っても理論が不変であるということが超対称性である．上の作用関数は超対称変換のほか，X^i，S^{Aa} が10次元 Lorentz 変換，平行移動に対して，それぞれベクトル，スピノールの変換をするときも不変である．

超対称変換の特性として，パラメータが $\varepsilon^{(1)}$，$\varepsilon^{(2)}$ の 2 つの変換を続けて行ったとき（$\rho_a\partial^a S=0$ を用いて）

$$[\delta_1,\delta_2]X^i=\zeta^a\frac{\partial}{\partial\xi^a}X^i+a^i \tag{10-90}$$

$$[\delta_1,\delta_2]S=\zeta^a\frac{\partial}{\partial\xi^a}S \tag{10-91}$$

ただし

$$\zeta^a=-2i(p^{(+)})^{-1}\bar{\varepsilon}^{(1)}\gamma_{(-)}\rho^a\varepsilon^{(2)}\ ;\ \ a^i=-2i\bar{\varepsilon}^{(1)}\rho^0\gamma^i\varepsilon^{(2)} \tag{10-92}$$

である．ζ^a は $(\tau\text{-}\sigma)$ 座標系での，a^i は10次元空間の X^i の移動を記述する．このことから超弦理論が時空の一般座標変換と密接に関係しており，重力を含んだ統一理論であることが理解される．

超対称性を導入することによって虚の質量をもつタキオンが除かれる機構を考えてみよう．一般に，Bose 場と Fermi 場では，量子効果は逆符号で消し合う効果を持つ．すなわち，超対称性のため，量子効果で，振動の 0 点エネルギー項が相殺し，質量の 2 乗の最低点が 0 となり虚の質量は現われない．これをみるため $S^{Aa}(\tau,\sigma)$ を量子化しよう．

---

*) $\gamma_{(+)}\gamma^0=\gamma^0\gamma_{(-)}=-\sqrt{\frac{1}{2}}\gamma_{(+)}\gamma_{(-)}$，$\gamma^\dagger{}_{(+)}=\gamma_{(-)}$，$\gamma^{(+)}\gamma^{(-)}+\gamma^{(-)}\gamma^{(+)}=2$．本節での32行32列の γ^μ 行列は $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=-2\eta^{\mu\nu}$ を満たす表示をとる．

境界条件としては，前章の閉じたBose弦の場合と同様に

$$S^{Aa}(\tau,\sigma)=S^{Aa}(\tau,\sigma+\pi) \tag{10-93}$$

ととり，

$$S^{1a}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}S^{a}{}_{n}e^{-2in(\tau-\sigma)}\ ;\ S^{2a}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{S}^{a}{}_{n}e^{-2in(\tau+\sigma)} \tag{10-94}$$

と基本振動で展開し*)，Fermi統計を考慮し，同時刻($\tau=\tau'$)の反交換関係式

$$\{S^{a}{}_{m},\ \bar{S}^{b}{}_{n}\}=(\gamma^{(+)})^{ab}\delta_{m+n,0}\ ;\ \{\widetilde{S}^{a}{}_{m},\bar{\widetilde{S}}^{b}{}_{n}\}=(\gamma^{(+)})^{ab}\delta_{m+n,0} \tag{10-95}$$

を量子条件としておく．もちろん，他の場の量との間では，$[\alpha^{\mu}{}_{m},S^{b}{}_{n}]=0$，$\{S^{a}{}_{m},\widetilde{S}^{b}{}_{n}\}=0$のように可換，もしくは反可換である．前章で考えた質量を定める式(10-52)の代りに

$$\left[\frac{1}{4}p_{\mu}p^{\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\alpha^{\mu}{}_{-n}\alpha_{\mu n}+\tilde{\alpha}^{\mu}{}_{-n}\tilde{\alpha}_{\mu n}\right)+\frac{n}{2}\left(\bar{S}_{-n}\gamma^{(-)}S_{n}+\bar{\widetilde{S}}_{-n}\gamma^{(-)}\widetilde{S}_{n}\right)\right\}\right]|\Phi\rangle=0 \tag{10-96}$$

が得られる．(10-52)の $-2\alpha(0)$ ($\alpha(0)=1$ととれた) が，$S^{a}{}_{m}$ 等に対する反交換関係のために生じる $2\alpha(0)$ と相殺してタキオンは現われない．

以上では超対称性の導入とその結果について述べたが，実際に矛盾のない(重力量子異常項等が現われない) 模型としては，3種類のものが提出されている．開いた弦と閉じた弦の両方を含み，$SO(32)$というゲージ対称性をもつ“第1種超弦”，ゲージ対称性を持たず，閉じた弦のみからなる“第2種超弦”，“ヘテロ型” (混成型)という閉じた26次元の弦と10次元の超対称な弦が合成されたもので，$E_8\times E_8$のゲージ対称性を有するものの3種である．ヘテロ型超弦が有力な研究対象になっている．これは，前章でも述べたように，クオークやレプトンの基本Fermi粒子のヘリシティーは左右非対称であり，この非対称性が，ヘテロ型には，理論の中に自然に取り入れられているためである．

§10-4　発散問題の解決可能性

弦模型は，点粒子ではなく非局所的なものと考えられるので，通常の場の理論に現われた無限大の困難を除去する可能性が予測される．たとえば図10-5のような，

---

*)　Sに対する方程式 $\rho^{b}\dfrac{\partial}{\partial\xi^{b}}S=0$ を成分で書くと $(\partial_0+\partial_1)S^{1a}=0$，$(\partial_0-\partial_1)S^{2a}=0$ となる．

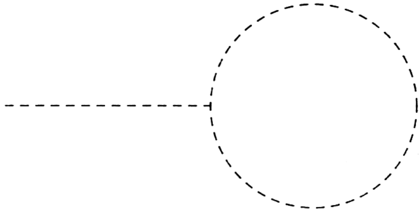
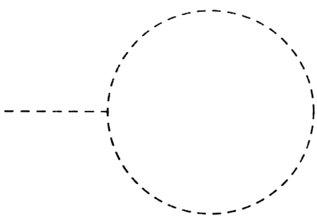


図 10-5

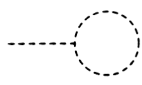
重力場自身の非線形型の相互作用から生ずる，おたまじゃくし（tadpole）型のFeynman 図を考える．既に § 8 -3で述べたように，この図の寄与を計算すれば無限大が現われる．この無限大の起源は次のようにも考えられる．ループを重力子が一周する時間を Δt とすると，その間のエネルギーのゆらぎ ΔE との間には，量子力学における不確定性関係 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$ が存在する．したがってループをまわる時間が短くなれば非常に大きなエネルギーの重力子がまわることになるので無限大の発散が生ずる．ここで，粒子の場合，図10-6のように $\Delta t \to \infty$，$\Delta t \to 0$ に対応するループは同等ではなく，どちらも寄与するので発散の困難が現われたのである．弦の場合には，図10-6の 2 つの図が同等なものと考えられ，困難が避けられる可能性が存在することを以下で説明しよう．

§ 10-2で述べたように，閉じた弦に重力子は含まれているので，点粒子としての重力子が一周したループ，図10-5の代りに，弦理論では図10-7のように，閉じた弦が一周したドーナツ状の図形で置き換えるべきである．

このようなドーナツ状の図形はトーラス（輪環体）と呼ばれる．閉じた弦の初めに λ_1 であったものが，λ_2 に沿って動いて一周したのがトーラスである．トーラス



$\Delta t \to \infty$



$\Delta t \to 0$

図 10-6

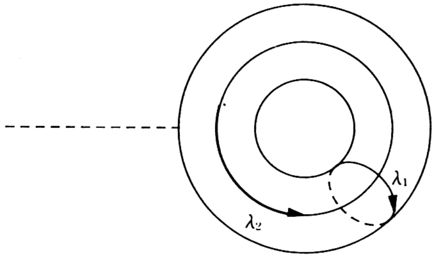


図 10-7

は数学的には，複素平面上で，λ_1，λ_2 を複素数とし，図10-8のように，対応する印をつけた辺を同一視してできたものである．もっと一般には，m，n を任意の整数として，複素平面上の点を

$$z \approx z + m\lambda_1 + n\lambda_2 \tag{10-97}$$

と同一視して作られたものである．λ_1，λ_2 がトーラスの形を指定するパラメータと考えられる．$\tau = \lambda_2/\lambda_1$ とすると，一般性を失うことなく，$\mathrm{Im}\tau > 0$ とできる．しかし，(λ_1, λ_2) の組とトーラスとは必ずしも 1 対 1 の対応はしていなくて，2 つの違った複素数の組が同じトーラスになることを以下で示そう．a，b，c，d が整数で $ad - bc = 1$ を満たすとき，

$$\begin{pmatrix} \lambda'_2 \\ \lambda'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{10-98}$$

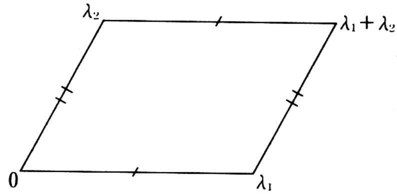


図 10-8

で与えられた (λ'_1, λ'_2) の組で書かれたトーラス

$$z \approx z + m'\lambda'_1 + n'\lambda'_2 \tag{10-97'}$$

は(10-97)のトーラスと同じである．実際，$(n', m') = (n, m)\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とすれば(10-97′)は(10-97)となる．さらに，λ_1, λ_2 を定数倍することは，複素座標 z をその定数で割ることと同等なのでトーラスの構造を変えない．よって $\tau = \lambda_2/\lambda_1$ をトーラスの構造を表わすパラメータにとることができよう．(10-97)と(10-97′)の同等性と(10-98)から，τ に対する次の変換

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{10-99}$$

によって，トーラスの構造は変らない．(10-99)の変換は**モジュラ変換**と呼ばれ，

$$\tau \to \tau + 1, \quad \tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{10-100}$$

の 2 つの変換から生成される．

ここで，弦理論における Feynman 図の評価の問題に帰ろう．$\Delta t = |\tau|$ とみなすと点粒子での図10-6は，図10-9のようになる．さらに λ_2 の長さが λ_1 のそれより短くなると，λ_2 の長さの弦が λ_1 をまわってできたものとも考えられる．これは，λ_1 と λ_2 の役割を替えたもので，トーラスとしては同じである．したがって λ_2 の長さが λ_1 よりも短いものは考慮に入れなくてもよい．(10-99)，(10-100) のモジュラ変換で不変なものは同じと考えればよい．点粒子の場合は，ループをまわる時間はいくらでも小さくできて，ループをまわるエネルギーがいくらでも大きくなり，発散を生じた．これに対して弦では，弦の長さより短い時間でまわるものは排除され

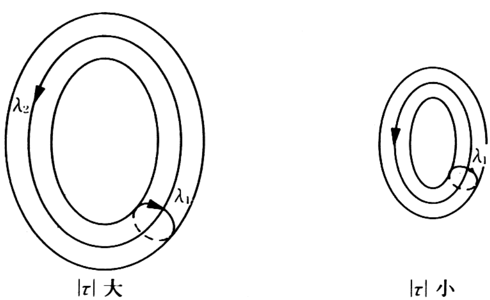


図 10-9

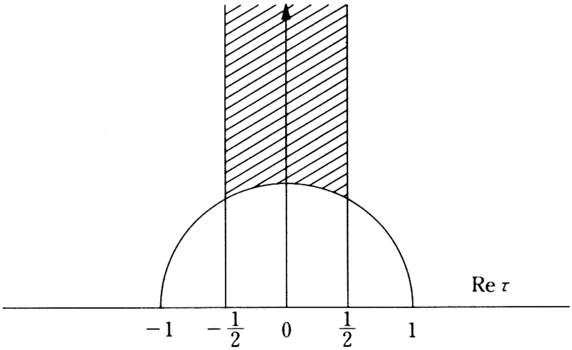


図 10-10

発散を生じない．

これを複素面上で考えると，その中の任意の点は図10-10の斜線を施した領域

$$|\tau| > 1 \ ; \ \mathrm{Im}\,\tau > 0 \ ; \ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau < \frac{1}{2} \tag{10-101}$$

にモジュラ変換によって移り得る．弦理論で発散が生じないのは，この領域での面積積分が有限であることを意味する．紫外発散は $|\tau|\to 0$ の領域から生ずるとみられるので $|\tau|>1$ の条件で紫外発散は現われない．

§10-5　量子重力異常項消滅の一機構

§9-3の共変的 Lorentz 異常項のところで述べたように，2次元時空で外部重力場が存在するとき，Fermi 粒子のループ図という量子論的効果によって Lorentz 共変性が破れる．また，そこで，$D=4k+2$ 次元では一般に重力異常項が存在することについてもふれた．いま，われわれは10次元超弦理論を考えているのであるから，理論の整合性のためには，重力異常項は存在してはならない．超弦理論には，異常項消滅の機構が秘められているのである．実は，この性質があることが Green-Schwarz［11 a，b］によって1984年に示された結果，超弦理論の流行，発展が始まったのである．

以下で，Green-Schwarz の異常項消滅の機構を模型を簡単化して説明しよう．点粒子の場合，図10-11のように，頂点が6個で，その内の5個に外部重力場が入り，頂点にエネルギー・運動量テンソルの反対称成分をとり出すという操作の入っ

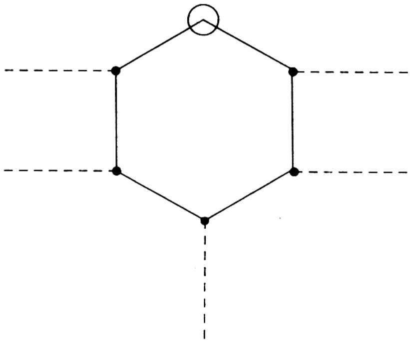


図 10-11

た6角形のFeynman図が重力異常項（Lorentz異常項）の主要部分となる．異常項は一般に空間反転を破るような項からなっているので，完全反対称テンソル $\varepsilon_{\mu_0\cdots\mu_9}$ を含んでいる．この10個の足をうめるには，5個の独立な運動量と5個の独立な外部重力場の添字が必要なためである．

点粒子の代りに第1種超弦をとろう．第1種超弦は§10-3で述べたように，開いた弦と閉じた弦とが相互作用することができるものである．また内部自由度として群 $SO(32)$ が開いた弦の両端に与えられている．図10-11のループの粒子を第一種超弦の開いた弦で置き換える．開いた弦のループは位相幾何学的には円筒か，Mōbiusの帯で表わされる．円筒を紙面に共形写像したのが図10-12の(a)と(c)である．この図で，見やすくするため図10-11の最上部の頂点部分も5個の外線と同じように扱った．(a)図は開いた弦の同じ端に外線6本が入ったもので，(c)図はそれぞれの端に2本，4本とわかれて外線が入った場合で，もとの図で書けば図10-13の(a′),(c′)である．図10-12の(a)，(c)は一枚の紙を切り抜いて作れるが，(b)は，(a)を作って，一度切って，その切った部分の表裏をひっくりかえして貼り合わすことにより，作られる．

図10-12の(a)，(b)からの寄与が相殺することは次のように説明される．内部自由度の $SO(32)$ の群が開いた弦の両端に与えられていることは既に述べた．(a)の開弦の一方の端には外線が入っているので，自由度は固定されているが，他方の端が作る軌跡である図10-12の(a)の内側の円には，これに沿って32個の量子数が走ることができるので(a)型のものは32個の図から成り立っている．(b)を(a)か

ら得るには，奇数回ねじらねばならない．この場合，ねじりを隣り合った外線の中間で行うことにする．1 回，3 回，5 回のねじりの数は，それぞれ $_6C_1=6$; $_6C_3=20$; $_6C_5=6$ となり，合計32個となる．スピン 1/2 の右巻きの粒子と左巻きの粒子では量子異常項に逆符号で寄与することに対応して，奇数回ねじった(b)図は(a)図に比べて逆符号の寄与をする．したがって(a)，(b)両図からの寄与は相殺するのである．

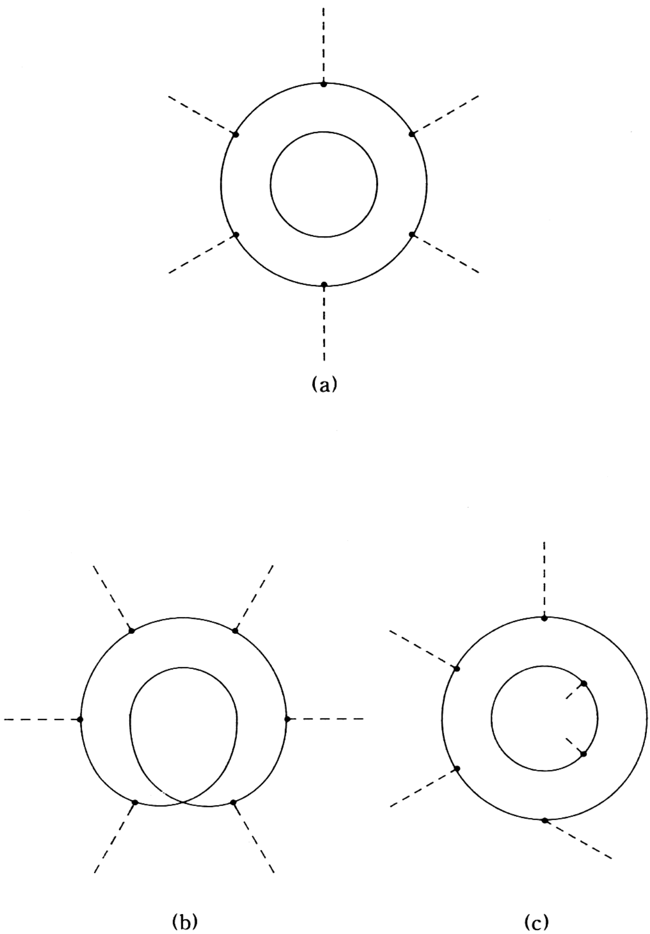


図 10-12

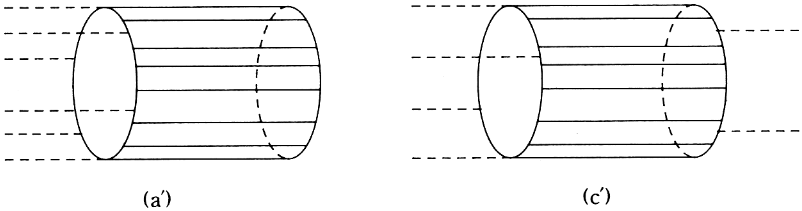


図 10-13

残った(c)図であるが，これはそれ自身で0になる．このことは一見不思議に見える．弦の張力を無限に大きくすると弦は点粒子となる．図10-12の円環の内円を外円に近づけて面積を小さくすると，図10-14のようになる．この図からの寄与は通常の粒子像の場合にも現われるので，異常項が残るように考えられる．しかし，図10-13の(c′)図は図10-15のように，閉じた弦に4本の外部重力子が入り，時間と共に右の方向に進み，2本の外部重力子を放出したものともみることができる．こういう対応は弦理論誕生のきっかけとなった1968年のVenezianoの双対(duality)模型の基本的な考えでもあった．したがって閉じた弦を縮めると，図10-16のような極限も考えられる．ところで§10-2の(10-84)で示したように，閉じた弦の粒子的な基準振動には重力子と共に反対称テンソル場 $A_{\mu\nu}=-A_{\nu\mu}$ が含まれていた．図10-16の(c''')の中間には反対称テンソル場 $A_{\mu\nu}$ 場も入ることができる．先

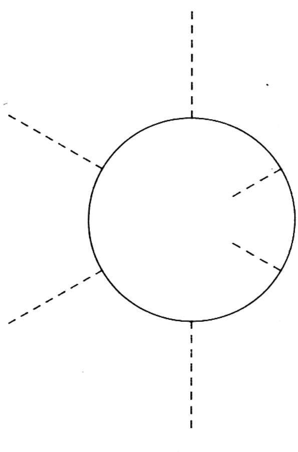


図 10-14

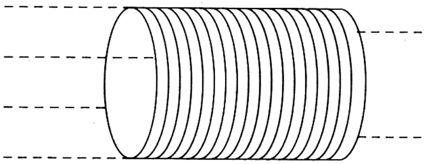


図 10-15(c″)

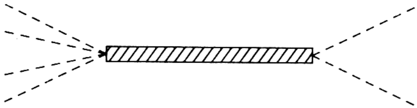


図 10-16(c‴)

に注意した図10-14からの Lorentz 異常項が

$$\sim \varepsilon_{\mu\nu\alpha_1}\cdots{}_{\alpha_8}K^{\alpha_1\cdots\alpha_8} \tag{10-102}$$

の形であったとすると，図10-16(c''') の中間を走る $A_{\mu\nu}$ を用いて

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha_1}\cdots{}_{\alpha_8}A^{\mu\nu}K^{\alpha_1\cdots\alpha_8} \tag{10-103}$$

の相互作用を，粒子的記述で表わした場合の作用関数に導入できるので，図10-14から現われた異常項と相殺させることが可能となり，図10-12の(c)図からは量子重力異常項は生じない．

以上が，式を用いずに，図表的に Green-Schwarz の量子異常項の相殺の様子を示した大まかな説明である．ヘテロ型超弦についても説明がなされている[12]．

§10-6　おわりに

前節では図式的に，発散の困難の除去や，量子重力異常項の相殺機構を説明したが，実際には Riemann 面の複素構造，Riemann のデータ関数，保型形式，さらにモジュラ空間上の代数幾何学等を用いて，数学的にも超弦理論の有効性が示されている．現在のところ，発散や異常項が存在しないような整合性のある重力理論は，超弦理論以外には見当らない．さらに特徴的なことは，超弦理論には，ただ1個のパラメータ（弦の長さに相当する Planck の長さ $10^{-33}cm$）しか含まれていない，その意味で重力まで含めた最有力な統一理論といえるであろう．

しかしながら，現在，超弦理論が，これまで提唱されていた大統一理論よりも優

れているという実験的事実もないし，実験に対する予言力も持ち合わせていない．26次元や10次元空間からわれわれの 4 次元時空を導く過程や，それと同時に，従来の標準ゲージ模型の $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ の対称性，クォークの世代を導く機構の解明がなされねばならない．そのためには，素粒子物理学と数学との交流や協同による一層の発展が望まれる．

最後に，弦理論それ自身に残っている最も大きな問題にふれなければならない．通常の場の理論では，粒子は場の真空状態からのずれとして定義され，この場を規定する原理が存在していた．重力子を導いた Einstein の重力理論を構築する際の等価原理と一般相対性原理に対応する原理が，超弦理論には存在しない．点の代りに有限な長さの弦を基本にした以上，これまでのように無限に小さな空間や時間の間隔を考えることは物理的に意味を持たなくなるであろう．このことは，弦の理論を幾何学的原理から導き出すには根本的な概念の変革の必要性を示唆する．すなわち Einstein が特殊相対性理論から一般相対性理論に到達した過程と比べられる，あるいはそれ以上の飛躍が必要であろう．

付　　録

§ A-1　$h_{\mu\nu}$ による Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ の展開

$$
\begin{aligned}
2R_{00} = {} & h_{00,ii}+h_{ii,00}-2h_{0i,0i}-h_{ij}(h_{00,ij}+h_{ij,00}-2h_{0i,0j}) \\
& +\frac{1}{2}h_{00,i}(h_{00,i}+h_{jj,i}-2h_{ij,j})+\frac{1}{2}h_{00,0}(h_{ii,0}-2h_{0i,i}) \\
& +h_{0i,0}(2h_{ij,j}-h_{jj,i})-\frac{1}{2}h_{ij,0}h_{ij,0}-\frac{1}{2}(h_{0i,j}-h_{0j,i})(h_{0i,j}-h_{0j,i}) \\
& -(h_{ij,00}-2h_{0j,0i}+h_{00,ij})(h_{0i}h_{0j}-h_{ik}h_{jk})-h_{ij,0}(h_{0i}h_{0j}-h_{ik}h_{jk})_{,0} \\
& +h_{00,i}(h_{00}h_{0i}-h_{0j}h_{ij})_{,0} \\
& +\frac{1}{2}h_{00,0}\{2(h_{0i}h_{ij})_{,j}+h_{00}(h_{ii,0}+2h_{0i,i})+h_{0i}(4h_{0i,0}-h_{jj,i})-h_{ij}h_{ij,0}\} \\
& +\frac{1}{2}(2h_{0i,0}-h_{00,i})\{2(h_{0i}h_{0j}-h_{ik}h_{jk})_{,j}-h_{0i}(h_{jj,0}+2h_{00,0}) \\
& +h_{ij}(h_{kk,j}+h_{00,j})+2h_{0j}(h_{ij,0}+h_{0j,i}-h_{0i,j}) \\
& +(-h_{00}h_{00,i}-2h_{0j}h_{0j,i}+h_{jk}h_{jk,i})\}+(h_{ij,0}+h_{0i,j}-h_{0j,i}) \\
& \times\{h_{0j}h_{00,i}-h_{jk}(h_{ik,0}+h_{0k,i}-h_{0i,k})\}+O(h^4) \qquad \text{(A1-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2R_{0i} = {} & h_{0i,jj}+h_{jj,0i}-h_{ij,0j}-h_{0j,ij}+h_{0j}(h_{0i,0j}+h_{0j,0i}-h_{00,ij}-h_{ij,00}) \\
& -h_{jk}(h_{jk,0i}-h_{ij,0k}-h_{0j,ik}+h_{0i,jk})+\frac{1}{2}(h_{ij,0}+h_{0j,i}-h_{0i,j})(2h_{jk,k}-h_{kk,j}) \\
& +\frac{1}{2}h_{00,j}(h_{0i,j}+h_{0j,i}-h_{ij,0})+\frac{1}{2}h_{00,i}(h_{jj,0}-2h_{0j,j}) \\
& +\frac{1}{2}(h_{jk,0}+h_{0j,k}-h_{0k,j})(h_{ik,j}+h_{jk,i}-h_{ij,k})-h_{jk,0}h_{jk,i}+O(h^3)
\end{aligned}
$$

(A1-2)

$$
\begin{aligned}
2R_{ij} = {} & h_{ij,kk} - h_{ij,00} + h_{kk,ij} - h_{jk,ik} - h_{ik,jk} - h_{00,ij} + h_{0j,0i} + h_{0i,0j} \\
& - \frac{1}{2} h_{00,i} h_{00,j} + 2 h_{0k,i} h_{0k,j} - \frac{1}{2} h_{kl,i} h_{kl,j} \\
& + h_{00}(h_{0i,0j} + h_{0j,0i} - h_{ij,00} - h_{00,ij}) + h_{0k}(2h_{0k,ij} + 2h_{ij,0k} - h_{0i,jk} - h_{0j,ik} \\
& - h_{ik,0j} - h_{jk,0i}) - h_{kl}(h_{kl,ij} - h_{jk,il} - h_{ik,jl} + h_{ij,kl}) + h_{ik,l}(h_{jl,k} - h_{jk,l}) \\
& + \frac{1}{2}(h_{ik,j} + h_{jk,i} - h_{ij,k})(h_{00,k} + 2h_{kl,l} - h_{ll,k} - 2h_{0k,0}) \\
& + \frac{1}{2}(h_{0i,j} + h_{0j,i} - h_{ij,0})(h_{00,0} - 2h_{0k,k} + h_{kk,0}) \\
& - \frac{1}{2}(h_{0i,k} + h_{0k,i} - h_{ik,0})(h_{jk,0} + h_{0k,j} - h_{0j,k}) \\
& - \frac{1}{2}(h_{0k,i} + h_{ik,0} - h_{0i,k})(h_{0j,k} + h_{0k,j} - h_{jk,0}) + O(h^3). \qquad \text{(A1-3)}
\end{aligned}
$$

§ A-2　方程式 (5-3) の右辺の $h_{\mu\nu}^{(n)}$ による展開形

$$
\begin{aligned}
& 8\pi G c^{-4}\left(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}\right) T^{\rho\sigma} \\
& = 8\pi G c^{-2} \sum_a m_a \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_a) \\
& \times \Bigg[-\left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\right) - c^{-1} v_a{}^i (\eta_{\mu 0}\eta_{\nu i} + \eta_{\mu i}\eta_{\nu 0}) + \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} h_{00}^{(2)} - h_{\mu\nu}^{(2)}) \\
& - (\eta_{\mu 0} h_{\nu 0}^{(2)} + \eta_{\nu 0} h_{\mu 0}^{(2)}) + c^{-2} v_a{}^i v_a{}^j \left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\delta_{ij} - \eta_{\mu i}\eta_{\nu j}\right) \\
& - \left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\right)\left(h_{00}^{(2)} - \frac{1}{2} h_{ii}^{(2)} + \frac{1}{2} c^{-2} \boldsymbol{v}_a{}^2\right) + \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} h_{00}^{(3)} - h_{\mu\nu}^{(3)}) \\
& - (\eta_{\mu 0} h_{\nu 0}^{(3)} + \eta_{\nu 0} h_{\mu 0}^{(3)}) + c^{-1} v_a{}^i (\eta_{\mu\nu} h_{0i}^{(2)} - \eta_{\mu 0} h_{\nu i}^{(2)} - \eta_{\nu 0} h_{\mu i}^{(2)} - \eta_{\mu i} h_{\nu 0}^{(2)} \\
& - \eta_{\nu i} h_{\mu 0}^{(2)}) - c^{-1} v_a{}^i (\eta_{\mu 0}\eta_{\nu i} + \eta_{\mu i}\eta_{\nu 0})\left(h_{00}^{(2)} - \frac{1}{2} h_{ii}^{(2)} + \frac{1}{2} c^{-2} \boldsymbol{v}_a{}^2\right) \\
& - \left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} + \eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}\right)\left(h_{00}^{(3)} - \frac{1}{2} h_{ii}^{(3)} + c^{-1} v_a{}^i h_{0i}^{(2)}\right) + \frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} h_{00}^{(4)} - h_{\mu\nu}^{(4)}) \\
& - (\eta_{\mu 0} h_{\nu 0}^{(4)} + \eta_{\nu 0} h_{\mu 0}^{(4)}) + \left(\frac{1}{2} h_{\mu\nu}^{(2)} h_{00}^{(2)} - h_{\mu 0}^{(2)} h_{\nu 0}^{(2)}\right) \\
& + c^{-1} v_a{}^i (\eta_{\mu\nu} h_{0i}^{(3)} - \eta_{\mu 0} h_{\nu i}^{(3)} - \eta_{\nu 0} h_{\mu i}^{(3)} - \eta_{\mu i} h_{\nu 0}^{(3)} - \eta_{\nu i} h_{\mu 0}^{(3)}) \\
& + c^{-2} v_a{}^i v_a{}^j \left\{\frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu} h_{ij}^{(2)} + \delta_{ij} h_{\mu\nu}^{(2)}) - \eta_{\mu i} h_{\nu j}^{(2)} - \eta_{\nu i} h_{\mu j}^{(2)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$+\left(h_{00}^{(2)}-\frac{1}{2}h_{kk}^{(2)}+\frac{1}{2}c^{-2}\boldsymbol{v}_a{}^2\right)\left\{\frac{1}{2}(\eta_{\mu\nu}h_{00}^{(2)}-h_{\mu\nu}^{(2)})-\eta_{\mu0}h_{\nu0}^{(2)}-\eta_{\nu0}h_{\mu0}^{(2)}\right.$$

$$\left.+c^{-2}v_a{}^iv_a{}^j\left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\delta_{ij}-\eta_{\mu i}\eta_{\nu j}\right)\right\}$$

$$-c^{-1}v_a{}^i(\eta_{\mu0}\eta_{\nu i}+\eta_{\mu i}\eta_{\nu0})\left(h_{00}^{(3)}-\frac{1}{2}h_{jj}^{(3)}+c^{-1}v_a{}^jh_{0j}^{(2)}\right)-\left(\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}+\eta_{\mu0}\eta_{\nu0}\right)$$

$$\times\left\{h_{00}^{(4)}-\frac{1}{2}h_{ii}^{(4)}+c^{-1}v_a{}^ih_{0i}^{(3)}+\frac{1}{2}c^{-2}v_a{}^iv_a{}^jh_{ij}^{(2)}+c^{-2}\boldsymbol{v}_a{}^2h_{00}^{(2)}\right.$$

$$-\frac{1}{4}c^{-2}\boldsymbol{v}_a{}^2h_{ii}^{(2)}+\frac{3}{8}c^{-4}(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2+h_{00}^{(2)}h_{00}^{(2)}-\frac{1}{2}h_{00}^{(2)}h_{ii}^{(2)}+\frac{1}{8}h_{ii}^{(2)}h_{jj}^{(2)}$$

$$\left.+\frac{1}{4}h_{ij}^{(2)}h_{ij}^{(2)}\right\}+O(c^{-5})\Bigg]. \qquad \text{(A2-1)}$$

§ A-3　対数項 $\dfrac{4G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\dfrac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}\ln(r_a+r_b+r_{ab})$ の導出

はじめに次の形の微分方程式を考える：

$$\triangle f=\frac{(r_a+r_b)^n}{r_ar_b},\quad(a\neq b,\ n=0,1,2\cdots). \qquad \text{(A3-1)}$$

ここで Laplace 演算子 $\triangle$ は，r_a，r_b および r_{ab} を使って

$$\triangle=\left(\frac{\partial}{\partial r_a}-\frac{\partial}{\partial r_b}\right)^2+\frac{2}{r_a}\frac{\partial}{\partial r_a}+\frac{2}{r_b}\frac{\partial}{\partial r_b}+\frac{(r_a+r_b)^2-r_{ab}{}^2}{r_ar_b}\frac{\partial^2}{\partial r_a\partial r_b} \qquad \text{(A3-2)}$$

と表わされる．(A3-1) と (A3-2) から f は変数 $s\equiv r_a+r_b$ の関数であることがわかり，方程式 (A3-1) は

$$\left\{(s+r_{ab})(s-r_{ab})\frac{\partial^2}{\partial s^2}+2s\frac{\partial}{\partial s}\right\}f=s^n \qquad \text{(A3-3)}$$

となる．この方程式の解は

n が偶数の場合

$$f=\frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{n}s^n+\frac{1}{n-2}s^{n-2}r_{ab}{}^2+\cdots+\frac{1}{2}s^2(r_{ab})^{n-2}+(r_{ab})^n\ln(s\pm r_{ab})\right\}$$

$$\text{(A3-4)}$$

n が奇数の場合

$$f=\frac{1}{n+1}\left\{\frac{1}{n}s^n+\frac{1}{n-2}s^{n-2}r_{ab}{}^2+\cdots+s(r_{ab})^{n-1}\right\} \qquad \text{(A3-5)}$$

である．$(r_{ab})^n\ln(s-r_{ab})$ 項は，2 点 z_a と z_b を結ぶ直線上で発散するので物理的

に受け入れられない．したがって，$n=0$ に対しては

$$f=\ln(r_a+r_b+r_{ab}) \tag{A3-6}$$

である．

$h_{ij}^{(4)}$ 中の対数項は，方程式（5-42）の右辺の $h_{00,i}^{(2)}h_{00,j}^{(2)}$ 項から

$$\begin{aligned}
h_{00,i}^{(2)}h_{00,j}^{(2)} &= \frac{4G^2}{c^4}\sum_a m_a{}^2\left(\frac{1}{r_a}\right)_{,i}\left(\frac{1}{r_a}\right)_{,j} \\
&\quad +\frac{4G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_am_b\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}\left(\frac{1}{r_ar_b}\right) \\
&= \Lambda_{ik:jl}(\partial)\left\{\frac{1}{2}\delta_{kl}\frac{G^2}{c^4}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\right\} \\
&\quad +\triangle\left\{\frac{4G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_am_b\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}\ln(r_a+r_b+r_{ab})\right\}
\end{aligned} \tag{A3-7}$$

によって導かれる．

§ A-4　$X_{0i}^{(5)}$ および $X_{00}^{(6)}$ の表示

$$\begin{aligned}
X_{0i}^{(5)} &= \frac{4G^2}{c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}(2v_b{}^i-v_a{}^i)-\frac{2G}{c^5}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2v_a{}^i \\
&\quad +\frac{G^2}{c^5}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\{v_a{}^i-n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)\} \\
&\quad +\frac{4G^2}{c^5}\sum_a\sum_{b\neq a} m_am_bv_b{}^j\left(-3\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}+4\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^j\partial z_b{}^i}\right)\ln(r_a+r_b+r_{ab}) \\
&\quad -(1-y)\frac{G^2}{2c^5}\sum_a\sum_b m_am_b\left\{\frac{n_a{}^i(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)}{r_a{}^2}+\frac{v_a{}^i-n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)}{r_ar_b}\right\} \\
&\quad -y\frac{G^2}{c^5}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_a{}^2}\{n_a{}^i(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)+n_b{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)+2n_a{}^i(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_a) \\
&\quad -2v_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\}-y\frac{2G^2}{c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_a{}^2}v_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab}) \\
&\quad -y\frac{2G^2}{c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}\{v_a{}^i-v_b{}^i-n_{ab}{}^i(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a-\boldsymbol{v}_b)\}
\end{aligned}$$

$$-y^2\frac{G^2}{4c^5}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}\{v_a{}^i-n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)-n_b{}^i(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_a)$$

$$+n_b{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)\} \tag{A4-1}$$

$$X_{00}^{(6)}=\frac{4G^3}{3c^6}\sum_a\sum_b\sum_c\frac{m_am_bm_c}{r_ar_br_c}+\frac{G^3}{4c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b{}^2}{r_ar_b{}^2}+\frac{G^3}{6c^6}\sum_a\frac{m_a{}^3}{r_a{}^3}$$

$$+\frac{4G^3}{c^6}\sum_a\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_am_bm_c}{r_ar_br_{bc}}$$

$$+\frac{G^3}{c^6}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\left\{3\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_bm_c}{r_{ab}r_{ac}}-2\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq b}\frac{m_bm_c}{r_{ab}r_{bc}}-\frac{7}{4}\sum_{b\neq a}\frac{m_b{}^2}{r_{ab}{}^2}\right\}$$

$$-\frac{G^3}{c^6}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\left\{2\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_bm_c}{r_{bc}{}^2}(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{bc})+\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_bm_c}{r_{bc}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{bc})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\right\}$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_am_b}{r_ar_b}\{8(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-8\boldsymbol{v}_a{}^2+2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_am_b}{r_ar_{ab}}\{9\boldsymbol{v}_a{}^2-8(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-4\boldsymbol{v}_b{}^2+(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\left\{-\frac{3}{2}\boldsymbol{v}_a{}^2+2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\right\}+\frac{7G}{4c^6}\sum_a\frac{m_a}{r_a}(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2$$

$$+\frac{4G^3}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a{}^2m_b}{r_a{}^3}\left(1-\frac{r_b}{r_{ab}}-\frac{r_b{}^2}{r_{ab}{}^2}+\frac{r_b{}^3}{r_{ab}{}^3}-\frac{r_ar_b{}^2}{r_{ab}{}^3}\right)$$

$$+\frac{4G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\left\{(3v_a{}^iv_a{}^j+2v_b{}^iv_b{}^j-4v_b{}^iv_a{}^j)\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_a{}^j}\right.$$

$$\left.+4(v_a{}^iv_b{}^j-v_b{}^iv_a{}^j)\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}\right\}\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$-\frac{12G^3}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_am_bm_c}{r_{ac}{}^2}n_{ac}{}^i\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}m_am_b\{\ln(r_a+r_b+r_{ab})\}_{,00}$$

$$-\frac{15G^3}{8\pi c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a{}^2m_b\int d\boldsymbol{x}'\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_a|^4|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_b|}$$

$$+\frac{2G^3}{\pi c^6}\sum_a \sum_{b\neq a} \sum_{c\neq a,b} m_a m_b m_c \frac{\partial^4}{\partial z_a{}^i \partial z_b{}^j \partial z_c{}^i \partial z_c{}^j}$$

$$\times \int dx' \frac{\ln(|x'-z_a|+|x'-z_b|+|z_a-z_b|)}{|x'-x||x'-z_c|}$$

$$+(1-y)\frac{G^3}{c^6}\sum_a \sum_b \sum_{c\neq b} \frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{bc}{}^2}(\boldsymbol{n}_b \cdot \boldsymbol{n}_{bc})$$

$$+(1-y)\frac{G^2}{c^6}\left[\sum_a \sum_b \frac{m_a m_b}{r_a r_b}\{\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}\right.$$

$$\left.+\sum_a \sum_{b\neq a} \frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\right]$$

$$+y\frac{G^3}{c^6}\left[4\sum_a \sum_b \sum_c \frac{m_a m_b m_c}{r_a{}^2 r_b}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_c)-2\sum_a \sum_{b\neq a} \sum_c \frac{m_a m_b m_c}{r_a{}^2 r_c}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\right.$$

$$+\sum_a \sum_{b\neq a} \sum_{c\neq a} \frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})-\sum_a \sum_{b\neq a} \sum_{c\neq b} \frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{bc})$$

$$-\frac{1}{2}\sum_a \sum_b \sum_{c\neq a} \frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{ac}{}^2}\{7(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ac})+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\}$$

$$\left.+\sum_a \sum_{b\neq a} \sum_c \frac{m_a m_b m_c}{r_a{}^2 r_{ab}}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_c)-3\sum_a \sum_{b\neq a} \sum_{c\neq a} \frac{m_a m_b m_c}{r_a{}^2 r_{ab}}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\right]$$

$$+y\frac{G^2}{c^6}\left[\sum_a \sum_b \frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\left\{3(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_a)+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)\right.\right.$$

$$\left.-2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\boldsymbol{v}_a{}^2+\frac{3}{2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\right\}$$

$$+\sum_a \sum_{b\neq a} \frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\left\{\frac{3}{2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\boldsymbol{v}_a{}^2+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\right\}$$

$$\left.+\sum_a \sum_{b\neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}\{3\boldsymbol{v}_a{}^2-3(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-3(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)^2+3(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}\right]$$

$$-y\frac{G^2}{2c^4}\sum_a \sum_{b\neq a} m_a m_b (\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})_{,00}$$

$$+y^2\frac{G^3}{4c^6}\left[\sum_a \sum_b \sum_c \frac{m_a m_b m_c}{r_a{}^3}\{-(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_c)+3(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_c)\}\right.$$

$$+\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_c\frac{m_a m_b m_c}{r_a^3}\{2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_c)-6(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_c)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\}$$

$$+\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_a^3}\{3(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ac})-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\}\Big]$$

$$+y^2\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}\{(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)-(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)$$

$$+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)\}. \tag{A4-2}$$

この式の右辺にある 2 つの積分項は重力場の横波部分に関係している．このうち 2 体の相互作用に関係する積分 $\sum_a\sum_{b\neq a} m_a{}^2 m_b\int d^3\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}|^{-1}|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_a|^{-4}|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_b|^{-1}$ は実行できる．その結果は § A-7 にすべての横波成分の寄与をまとめ $g_{00}^{\mathrm{TT}(S)}$ (A7-7) として表記する．

§ A-5　Lagrange 関数 $L^*{}_{\mathrm{G}}(x)$ および $L_{\mathrm{M}}(x)$ の $h_{\mu\nu}$ による展開

$L^*{}_{\mathrm{G}}(x)$ を $h_{\mu\nu}$ で展開し

$$L^*{}_{\mathrm{G}}=L_{\mathrm{G}}(h^2)+L_{\mathrm{G}}(h^3)+L_{\mathrm{G}}(h^4)+\cdots \tag{A5-1}$$

とおくと

$$L_{\mathrm{G}}(h^2)=\frac{c^4}{64\pi G}\{2h_{00,i}h_{ij,j}-2h_{00,j}h_{ii,j}-h_{ij,k}h_{ij,k}+h_{ii,k}h_{jj,k}+2h_{ij,k}h_{ik,j}$$

$$-2h_{ii,j}h_{jk,k}+2h_{0i,j}h_{0i,j}-2h_{0i,j}h_{0j,i}-2h_{00,0}h_{0i,i}-4h_{ij,0}h_{0i,j}$$

$$-2h_{00,i0}h_{0i}+2h_{ii,0}h_{0j,j}-2h_{jj,i0}h_{0i}+h_{ij,0}h_{ij,0}-h_{ii,0}h_{jj,0}\}$$

$$+\frac{c^4}{32\pi G}\{(h_{00,i}+h_{jj,i})h_{0i}\}_{,0} \tag{A5-2}$$

$$L_{\mathrm{G}}(h^3)=\frac{c^4}{64\pi G}\Big[\frac{1}{2}h_{00}\{2h_{00,i}h_{ij,j}-2h_{00,i}h_{jj,i}+h_{ij,k}h_{ij,k}+2h_{ii,j}h_{jk,k}$$

$$-h_{ii,j}h_{kk,j}-2h_{ij,k}h_{ik,j}-2h_{0i,j}h_{0j,i}+2h_{0i,j}h_{0i,j}-6h_{00,0}h_{0i,i}$$

$$-6h_{00,i0}h_{0i}-4h_{ij,0}h_{0i,j}+2h_{ii,0}h_{0j,j}-2h_{ii,j0}h_{0j}+h_{ij,0}h_{ij,0}-h_{ii,0}h_{jj,0}\}$$

$$+2h_{0i}\{h_{00,i}h_{0j,j}-h_{00,j}h_{0j,i}+2h_{ij,k}h_{0k,j}-2h_{ij,k}h_{0j,k}-h_{jj,k}h_{0k,i}$$

$$+2h_{jj,k}h_{0i,k}-2h_{jk,k}h_{0i,j}-h_{jj,i}h_{0k,k}+2h_{jk,i}h_{0j,k}-\frac{3}{2}h_{00,0}h_{00,i}$$

$$-\frac{1}{2}h_{00,0}h_{jj,i}+h_{00,0}h_{ij,j}-\frac{1}{2}h_{jj,0}h_{00,i}+\frac{1}{2}h_{jj,0}h_{kk,i}-h_{jj,0}h_{ik,k}$$

$$+2h_{jk,0}h_{ij,k}+2h_{0i,0}h_{0j,j}-2h_{0j,0}h_{0i,j}\}$$

$$+\frac{1}{2}h_{ll}\{2h_{00,i}h_{ij,j}-2h_{00,i}h_{jj,i}-h_{ij,k}h_{ij,k}+2h_{ij,k}h_{ik,j}-2h_{ij,i}h_{kk,j}$$

$$+h_{ii,j}h_{kk,j}+2h_{0i,j}h_{0i,j}-2h_{0i,j}h_{0j,i}-2h_{00,0}h_{0i,i}-2h_{00,i0}h_{0i}$$

$$+2h_{ii,0}h_{0j,j}-4h_{ij,0}h_{0i,j}-2h_{ii,j0}h_{0j}+h_{ij,0}h_{ij,0}-h_{ii,0}h_{jj,0}\}$$

$$+h_{ij}\{2h_{00,i}h_{kk,j}-2h_{00,i}h_{kj,k}+2h_{00,k}h_{ij,k}-2h_{00,k}h_{ki,j}+2h_{ik,l}h_{jk,l}$$

$$-2h_{ik,l}h_{jl,k}+2h_{ki,j}h_{ll,k}-2h_{ij,k}h_{ll,k}+2h_{ij,k}h_{kl,l}+2h_{kk,i}h_{lj,l}$$

$$-h_{kk,i}h_{ll,j}-2h_{kl,i}h_{kj,l}-2h_{ki,l}h_{kl,j}+h_{kl,i}h_{kl,j}-2h_{0i,k}h_{0j,k}$$

$$-2h_{0k,i}h_{0k,j}+4h_{0i,k}h_{0k,j}+2h_{00,0}h_{0i,j}+2h_{00,j0}h_{0i}-2h_{ij,0}h_{0k,k}$$

$$+4h_{ik,0}h_{0j,k}-2h_{kk,0}h_{0i,j}+4h_{ik,0}h_{0k,j}+2h_{ij,k0}h_{0k}+2h_{kk,i0}h_{0j}$$

$$+2h_{ij,0}h_{kk,0}-2h_{ik,0}h_{jk,0}\}\Big]$$

$$+\frac{c^4}{64\pi G}\{3h_{00}h_{00,i}h_{0i}+h_{00}h_{jj,i}h_{0i}+h_{kk}h_{00,i}h_{0i}+h_{kk}h_{jj,i}h_{0i}$$

$$-2h_{ij}h_{00,j}h_{0i}-2h_{ij}h_{kk,i}h_{0j}-2h_{ij}h_{ij,k}h_{0k}\}_{,0} \qquad \text{(A5-3)}$$

となる．(A5-2)および(A5-3)の最後の項，すなわち時間についての全微分の項は作用積分の変分に寄与しない．すなわち運動方程式に寄与しないので Lagrange 関数の計算の際には除くことができる．

$L_G(h^4)$の寄与は ppN 近似またはそれより高次の近似で生じる．ここでは ppN 次に寄与する項のみ取り出しておく．

$$L_G^{\mathrm{ppN}}(h^4)=\frac{c^4}{64\pi G}\Big[\frac{1}{8}(-3h_{00}h_{00}-2h_{00}h_{ll}-h_{ll}h_{mm}+2h_{lm}h_{lm})$$

$$\times(h_{00,i}h_{00,i}+h_{00,i}h_{jj,i})$$

$$+\{h_{im}h_{jm}-\frac{1}{2}(-h_{00}+h_{mm})h_{ij}+\frac{1}{8}\delta_{ij}(-h_{00}h_{00}$$
$$-2h_{00}h_{mm}+h_{mm}h_{nn}-2h_{mn}h_{mn})\}$$
$$\times\{h_{00,i}h_{00,j}+h_{kl,i}h_{kl,j}+2h_{ik,l}h_{jl,k}-2h_{il,k}h_{jl,k}$$
$$+h_{00,l}h_{lj,i}+h_{00,l}h_{li,j}-h_{00,l}h_{ij,l}-h_{kk,l}h_{lj,i}-h_{kk,l}h_{li,j}+h_{kk,l}h_{ij,l}\}$$
$$-\frac{1}{2}(h_{00}+h_{ll})\{h_{00}h_{00,i}h_{00,i}$$
$$+h_{ij}(-h_{ij,k}h_{00,k}-h_{kk,i}h_{00,j}-h_{00,i}h_{00,j})\}$$
$$+\frac{1}{2}(-h_{00}+h_{mm})\{h_{00}(2h_{00,i}h_{ij,j}-h_{00,i}h_{jj,i}+2h_{00,i}h_{00,i})$$
$$+h_{ij}(2h_{ij,k}h_{kl,l}-h_{ij,k}h_{ll,k}-2h_{00,i}h_{kj,k}+h_{00,i}h_{kk,j}+2h_{kk,i}h_{lj,l}$$
$$-h_{kk,i}h_{ll,j}-2h_{lk,i}h_{lj,k}-2h_{li,k}h_{lk,j}+2h_{lk,i}h_{lk,j})\}$$
$$-h_{ij}\{(h_{00}h_{00,k}+h_{lm}h_{lm,k})(2h_{ik,j}-h_{ij,k})+2h_{00}h_{00,i}h_{00,j}$$
$$+h_{lk}(-h_{00,l}+h_{mm,l})(2h_{ik,j}-h_{ij,k})-2h_{kl}h_{km,i}h_{lm,j}$$
$$-2h_{kl}h_{ki,m}h_{mj,l}+2h_{kl}h_{mi,k}h_{mj,l}+2h_{kl}h_{ki,m}h_{lj,m}-2h_{kl}h_{im,k}h_{jl,m}\}$$
$$+h_{00}h_{00}h_{00,i}(2h_{00,i}+2h_{ij,j}-h_{jj,i})+h_{00}h_{ij}h_{00,i}(h_{00,j}$$
$$-2h_{jk,k}+h_{kk,j})-h_{ik}h_{jk}(h_{00,i}h_{00,j}+h_{00,i}h_{ll,j})$$
$$+h_{ij}h_{kl}\{(h_{ik,m}+h_{im,k}-h_{km,i})(h_{jl,m}+h_{ml,j}-h_{jm,l})$$
$$-h_{ij,k}(h_{00,l}+2h_{lm,m}-h_{mm,l})\}$$
$$+h_{kl}h_{lm}\{2h_{ij,k}(2h_{im,j}-h_{ij,m})-h_{00,i}(h_{mk,i}+h_{im,k}-h_{ik,m})$$
$$-(2h_{ij,j}-h_{jj,i})(h_{mk,i}+h_{im,k}-h_{ik,m})$$
$$-(2h_{im,i}-h_{ii,m})(-h_{00,k}+h_{jj,k})\}\Big]. \tag{A5-4}$$

$L_M(x)$ の $h_{\mu\nu}$ による展開は

$$L_{\mathrm{M}}(x) = -\sum_a m_a c^2 \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a)$$

$$\times\Big[1-\frac{1}{2c^2}\boldsymbol{v}_a{}^2-\frac{1}{2}h_{00}-h_{0i}\frac{v_a{}^i}{c}-\frac{1}{2}h_{ij}\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{c^2}-\frac{1}{8c^4}(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2$$

$$-\frac{\boldsymbol{v}_a{}^2}{4c^2}\Big\{h_{00}+2h_{0i}\frac{v_a{}^i}{c}+h_{ij}\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{c^2}\Big\}-\frac{1}{8}\Big\{h_{00}+2h_{0i}\frac{v_a{}^i}{c}$$

$$+h_{ij}\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{c^2}\Big\}^2-\frac{1}{16}\Big\{\frac{\boldsymbol{v}_a{}^2}{c^2}+h_{00}+2h_{0i}\frac{v_a{}^i}{c}+h_{ij}\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{c^2}\Big\}^3+\cdots\Big] \tag{A5-5}$$

となる.

§ A-6　積分公式

L^{PPN} の計算に必要な積分公式をまとめておく.

$$G^3\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d m_a m_b m_c m_d \int d^3x \left(\partial_i\frac{1}{r_a}\right)\left(\partial_i\frac{1}{r_b}\right)\frac{1}{r_c r_d} = \frac{4\pi}{3}U\left(\qquad\right) \tag{A6-1}$$

$$G^3\sum_a\sum_b\sum_c\sum_d m_a m_b m_c m_d \int d^3x \left(\partial_i\frac{1}{r_a}\right)\left(\partial_i\frac{1}{r_b}\right)\frac{1}{r_c r_{cd}}$$

$$= -2\pi U\left(\qquad\right)+4\pi U(\circ\!-\!\circ\!-\!\circ\!-\!\circ) \tag{A6-2}$$

$$\int d^3x\frac{n_a{}^i n_b{}^j}{r_a{}^2 r_b{}^2 r_c} = -4\pi\left\{\frac{(n_{ab}{}^i+n_{ac}{}^i)(n_{ab}{}^j-n_{bc}{}^j)}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})^2}-\frac{\delta_{ij}-n_{ab}{}^i n_{ab}{}^j}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})r_{ab}}\right\},$$

$$(b\neq a,\ c\neq a,\ b) \tag{A6-3}$$

$$\int d^3x\frac{n_a{}^i n_b{}^j}{r_a{}^3 r_b{}^2} = 2\pi\frac{\delta_{ij}-2n_{ab}{}^i n_{ab}{}^j}{r_{ab}{}^2},\ (b\neq a) \tag{A6-4}$$

$$\int d^3x\frac{n_a{}^i n_a{}^j}{r_a{}^4 r_b} = -\pi\frac{\delta_{ij}-n_{ab}{}^i n_{ab}{}^j}{r_{ab}{}^2},\quad (b\neq a) \tag{A6-5}$$

$$\sum_a\sum_b\sum_c m_a m_b m_c \int d^3x\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{r_a{}^2 r_b{}^2 r_c}$$

$$= 2\pi\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a} m_a m_b m_c\frac{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{r_{ab}r_{ac}}+2\pi\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq b} m_a m_b m_c\frac{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{r_{ab}r_{bc}}$$

$$-2\pi\sum_a\sum_b\sum_{c\neq a,b} m_a m_b m_c \frac{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{r_{ac}r_{bc}} \tag{A6-6}$$

（$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$は物体の速度ベクトル）

$$\int d^3x \left(\partial_i \frac{1}{r_a}\right)\left(\partial_j \frac{1}{r_b}\right) = 2\pi \frac{\delta_{ij} - n_{ab}{}^i n_{ab}{}^j}{r_{ab}}, \qquad (a \neq b) \tag{A6-7}$$

$$\int d^3x \left(\partial_i \frac{1}{r_a}\right)\frac{1}{r_b} = 2\pi n_{ab}{}^i, \qquad (a \neq b). \tag{A6-8}$$

以上の公式をもとに計算すると，TT- 部に関する積分は次のようになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{G}{4\pi}\int d^3x \sum_a\sum_b m_a m_b \left(\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{r_a}\right)^{\mathrm{TT}}_{,k}\left(\frac{v_b{}^i v_b{}^j}{r_b}\right)^{\mathrm{TT}}_{,k} \\
&\quad = G\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left\{\frac{1}{16}\boldsymbol{v}_a{}^2\boldsymbol{v}_b{}^2 + \frac{1}{8}(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)^2 - \frac{5}{8}\boldsymbol{v}_a{}^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\right. \\
&\qquad \left. + \frac{3}{4}(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b) + \frac{3}{16}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)^2(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\right\}
\end{aligned} \tag{A6-9}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\int d^3x \sum_a m_a \left(\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{r_a}\right)^{\mathrm{TT}}\phi_{,i}\phi_{,j} \\
&\quad = G^2\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}\left\{\frac{1}{4}\boldsymbol{v}_a{}^2 - \frac{3}{4}\boldsymbol{v}_b{}^2 + \frac{1}{4}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\right\} \\
&\qquad + G^2\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}{}^2}\left\{-\frac{5}{8}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})\boldsymbol{v}_c{}^2\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{8}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{n}_{ac})(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{v}_c)^2 + \frac{7}{4}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_c)(\boldsymbol{n}_{ac}\cdot\boldsymbol{v}_c)\right\} \\
&\qquad - \frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b} m_a m_b m_c\left\{\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}+\boldsymbol{n}_{ac})\cdot\boldsymbol{v}_a\,(\boldsymbol{n}_{ab}-\boldsymbol{n}_{bc})\cdot\boldsymbol{v}_a}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})^2}\right. \\
&\qquad + 4\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}+\boldsymbol{n}_{ac})\cdot\boldsymbol{v}_c\,(\boldsymbol{n}_{ab}-\boldsymbol{n}_{bc})\cdot\boldsymbol{v}_c}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})^2} - \frac{\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)^2}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})r_{ab}} \\
&\qquad \left. - 4\frac{\boldsymbol{v}_c{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_c)^2}{(r_{ab}+r_{bc}+r_{ca})r_{ab}}\right\} \\
&\qquad + \frac{G^2}{8c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b{}^2}{r_{ab}{}^2}\{-2\boldsymbol{v}_a{}^2 + 17\boldsymbol{v}_b{}^2 - 35(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}.
\end{aligned} \tag{A6-10}$$

また§7-1で慣性中心の座標を計算する際に次の積分公式が必要である．

$$\int d^3x\, x^k\left(\partial_i \frac{1}{r_a}\right)\left(\partial_j \frac{1}{r_b}\right) = \pi\{\delta_{ki} n_{ab}{}^j - \delta_{kj} n_{ab}{}^i + (z_a{}^k + z_b{}^k)\frac{\delta_{ij} - n_{ab}{}^i n_{ab}{}^j}{r_{ab}}\},$$

$$(a \neq b). \qquad \text{(A6-11)}$$

§ A-7　座標条件 $\triangle g_{ij,j} - \frac{1}{4} g_{jk,ijk} - \frac{1}{4} \triangle g_{jj,i} = 0$，$\pi^{ii} = 0$ のもとでの計量テンソル

ADM の座標条件(5-146)のもとでの計量テンソルは (5-49)，(5-50)，(5-130) を満たし，さらに $\widetilde{I^{(5)}}$ は

$$\widetilde{I^{(5)}} = -\frac{3G^2}{4c^5}\sum_a \frac{m_a{}^2}{r_a}(\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a) - \frac{G^2}{2c^5}\sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a}(\boldsymbol{n}_{ab} \cdot \boldsymbol{v}_b)$$

$$-G^2 \sum_a \sum_{b \neq a} m_a m_b \left(3 v_a{}^j \frac{\partial}{\partial z_a{}^j} - 4 v_b{}^j \frac{\partial}{\partial z_a{}^j}\right) \ln(r_a + r_b + r_{ab})$$

$$+\frac{G^2}{12c^5}\sum_a \sum_{b \neq a} m_a m_b v_b{}^j \frac{\partial^3}{\partial z_a{}^k \partial z_b{}^k \partial z_b{}^i}\{(r_b{}^2 - r_a{}^2 + r_{ab}{}^2)$$

$$\times \ln(r_a + r_b + r_{ab}) + r_a r_{ab} - r_b r_{ab} + r_a r_b\} \qquad \text{(A7-1)}$$

で与えられる．そして ppN 近似の解は次のようになる．

$$g_{ij} = \delta_{ij}\left(1 + \frac{2G}{c^2}\sum_a \frac{m_a}{r_a} + \frac{3G^2}{2c^4}\sum_a \sum_b \frac{m_a m_b}{r_a r_b} - \frac{G^2}{c^4}\sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}\right.$$

$$\left. + \frac{G}{c^4}\sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a{}^2\right) + h_{ij}^{\mathrm{TT}(s)} + h_{ij}^{\mathrm{TT}(v)} \qquad \text{(A7-2)}$$

$$g_{0i} = -\frac{G}{2c^3}\sum_a \frac{m_a}{r_a}\{7 v_a{}^i + n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a)\} - \frac{2G}{c^5}\sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a{}^2 v_a{}^i$$

$$+\frac{G^2}{c^5}\sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}(8 v_b{}^i - 4 v_a{}^i) + \frac{G^2}{c^5}\sum_a \frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\{v_a{}^i - n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a)\}$$

$$-\frac{G^2}{2c^5}\sum_a \sum_b m_a m_b \left\{\frac{n_a{}^i(\boldsymbol{n}_b \cdot \boldsymbol{v}_b)}{r_a{}^2} + \frac{v_a{}^i - n_a{}^i(\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a)}{r_a r_b}\right\}$$

$$+\frac{4G^2}{c^5}\sum_a \sum_{b \neq a} m_a m_b v_b{}^j \left(4\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^j \partial z_b{}^i} - 3\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i \partial z_b{}^j}\right) \ln(r_a + r_b + r_{ab})$$

$$+\partial_i\left[\frac{G}{4c^5}\sum_a m_a v_a{}^2(\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a) - \frac{3G^2}{4c^5}\sum_a \frac{m_a{}^2}{r_a}(\boldsymbol{n}_a \cdot \boldsymbol{v}_a)\right.$$

$$-\frac{G^2}{4c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)+\frac{G^2}{4c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}{}^2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)(r_a-r_b)$$

$$-\frac{G^2}{2c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)$$

$$-\frac{G^2}{2c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\left(5v_a{}^j\frac{\partial}{\partial z_a{}^j}-8v_b{}^j\frac{\partial}{\partial z_a{}^j}\right)\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$+\frac{G^2}{12c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b v_b{}^j\frac{\partial^3}{\partial z_a{}^k\partial z_b{}^k\partial z_b{}^j}$$

$$\times\{(r_b{}^2-r_a{}^2+r_{ab}{}^2)\ln(r_a+r_b+r_{ab})+r_a r_{ab}-r_b r_{ab}+r_a r_b\}\Big] \qquad \text{(A7-3)}$$

$$g_{00}=-1+\frac{2G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}$$

$$+\frac{3G}{c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\boldsymbol{v}_a{}^2+\frac{3G^3}{2c^6}\sum_a\sum_b\sum_c\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_b r_c}$$

$$+\frac{7G^3}{2c^6}\sum_a\sum_b\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_b r_{ac}}+\frac{3G^3}{2c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{ab} r_{ac}}$$

$$+\frac{3G^3}{2c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{ab} r_{bc}}$$

$$-\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\{19\boldsymbol{v}_a{}^2-35(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}-\frac{5G^2}{c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}\boldsymbol{v}_a{}^2$$

$$+\frac{8G^2}{c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}\Big\{8\boldsymbol{v}_a{}^2-2\boldsymbol{v}_b{}^2$$

$$-\frac{17}{2}(\boldsymbol{v}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)+\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\Big\}-\frac{G^2}{2c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)$$

$$+\frac{G^2}{2c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}m_a m_b\Big\{(5v_a{}^i v_b{}^j-16v_a{}^j v_b{}^i)\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}$$

$$-8v_a{}^i v_b{}^j\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_a{}^j}\Big\}\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$+\frac{7G}{4c^6}\sum_a \frac{m_a}{r_a}(\boldsymbol{v}_a{}^2)^2+g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}+g_{00}^{\mathrm{TT}(v)}. \tag{A7-4}$$

ここで h_{ij}^{TT} は g_{ij} の c^{-4} 次の TT- 部，g_{00}^{TT} は g_{00} に対するこの h_{ij}^{TT} からの寄与であり，括弧内の記号 s と v はそれぞれ静的部分と速度に依存する部分とを表わす．これらの関数の具体的表示は

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}(s)}=-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}+\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^j\partial z_b{}^i}\right)\ln(r_a+r_b+r_{ab})\right\}^{\mathrm{TT}}$$

$$=-\frac{4G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\left[\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}\ln(r_a+r_b+r_{ab})\right.$$

$$-\frac{1}{8}\delta_{ij}\left\{\frac{1}{r_a r_b}-\frac{2}{r_a r_{ab}}+\frac{2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{r_{ab}{}^2}\right\}$$

$$-\frac{1}{8}\partial_i\partial_j\left\{\ln(r_a+r_b+r_{ab})-\frac{r_a}{r_{ab}}+\frac{r_a{}^2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{2r_{ab}{}^2}\right\}$$

$$\left.+\frac{n_a{}^i n_{ab}{}^j+n_a{}^j n_{ab}{}^i}{2r_{ab}{}^2}\right] \tag{A7-5}$$

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}(v)}=\frac{4G}{c^4}\sum_a m_a\left(\frac{v_a{}^i v_a{}^j}{r_a}\right)^{\mathrm{TT}}$$

$$=\frac{G}{4c^4}\sum_a\frac{m_a}{r_a}\left\{2v_a{}^i v_a{}^j+\delta_{ij}\boldsymbol{v}_a{}^2-5\delta_{ij}(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\right.$$

$$\left.+6(v_a{}^i n_a{}^j+v_a{}^j n_a{}^i)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)-5n_a{}^i n_a{}^j\boldsymbol{v}_a{}^2+3n_a{}^i n_a{}^j(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\right\} \tag{A7-6}$$

$$g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}=\frac{G^3}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a{}^2 m_b\left[\frac{1}{2r_a r_b r_{ab}}-\frac{3}{4r_a{}^2 r_b}-\frac{5}{2r_a r_{ab}{}^2}-\frac{3}{r_a{}^2 r_{ab}}\right.$$

$$-\frac{3}{4r_b r_{ab}{}^2}+\frac{r_{ab}}{2r_a{}^3 r_b}-\frac{r_b{}^2}{2r_a{}^3 r_{ab}{}^2}+\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)}{2r_a{}^2 r_{ab}}-\frac{7(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{2r_a{}^2 r_{ab}}$$

$$-\frac{9(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{2r_a r_{ab}{}^2}+\frac{(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{2r_a r_{ab}{}^2}+\frac{r_b}{4r_a{}^2 r_{ab}{}^2}\{15+17(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})$$

$$\left.+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\}-\frac{1}{2r_{ab}{}^3}\left(1-\frac{r_a}{r_b}\right)\right]$$

$$+\frac{G^3}{\pi c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a,b} m_a m_b m_c \int d^3x' \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z_c{}^i \partial z_c{}^j}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_c|}\right\}$$

$$\times\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i \partial z_b{}^j}+\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^j \partial z_b{}^i}\right)\ln(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_a|+|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_b|+|\boldsymbol{z}_a-\boldsymbol{z}_b|)\right\}^{\mathrm{TT}}$$

(A7-7)

$$g_{00}^{\mathrm{TT}(v)}=\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\{17\boldsymbol{v}_a{}^2-35(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}-\frac{G^2}{2c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}\{3\boldsymbol{v}_a{}^2-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_a)^2\}$$

$$+\frac{G^2}{2c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}\{-3\boldsymbol{v}_b{}^2+(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2+2\boldsymbol{v}_a{}^2\}$$

$$-\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\Big[(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)\{5\boldsymbol{v}_b{}^2-(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}-14(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{v}_b)\Big]$$

$$+\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\Big[(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\{5\boldsymbol{v}_b{}^2-(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)^2\}-14(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{v}_b)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\Big]$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a} m_a m_b\left\{(v_a{}^i v_a{}^j+8v_b{}^i v_b{}^j)\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_a{}^j}+8v_a{}^i v_a{}^j\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i \partial z_b{}^j}\right\}$$

$$\times\ln(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_a|+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}_b|+|\boldsymbol{z}_a-\boldsymbol{z}_b|) \qquad \text{(A7-8)}$$

である。

次に，同じ座標条件（5-146）のもとで，第6章のADMの力学変数の解を表示するとppN近似では

$$\phi=\frac{4G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a}-\frac{2G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}+\frac{2G}{c^4}\sum_a\frac{1}{r_a}\cdot\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a} \qquad \text{(A7-9)}$$

$$h_{ij}^{\mathrm{TT}}=-4f_{ij}^{\mathrm{TT}}+4\left(\frac{G}{c^4}\sum_a\frac{p_{ai}p_{aj}}{m_a r_a}\right)^{\mathrm{TT}} \qquad \text{(A7-10)}$$

$$\pi^{ij}-\pi^{ij\mathrm{TT}}$$

$$=\frac{G}{c^3}\sum_a\left\{2p_{ai}\left(\partial_j\frac{1}{r_a}\right)+2p_{aj}\left(\partial_i\frac{1}{r_a}\right)-\delta_{ij}p_{ak}\left(\partial_k\frac{1}{r_a}\right)-\frac{1}{2}p_{ak}(\partial_i\partial_j\partial_k r_a)\right\}$$

$$-\frac{9G^2}{4c^5}\delta_{ij}\sum_a m_a p_{ak}\frac{n_a{}^k}{r_a{}^3}+\frac{G^2}{c^5}\delta_{ij}\sum_a\sum_{b\neq a} m_b p_{ak}\left[\partial_k\left(\frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_a r_{ab}}-\frac{1}{r_b r_{ab}}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_b{}^k}\left(\frac{1}{r_b r_{ab}}-\frac{1}{r_a r_{ab}}-\frac{1}{r_a r_b}\right)+\frac{\partial}{\partial z_a{}^k}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r_b r_{ab}}-\frac{1}{r_a r_{ab}}+\frac{1}{r_a r_b}\right)\right.$$

$$-\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)+(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{4r_b{}^2}\Big\}\Big]+\frac{9G^2}{8c^5}\partial_i\partial_j\sum_a m_a p_{ak}\frac{n_a{}^k}{r_a}$$

$$+\frac{G^2}{c^5}\partial_i\partial_j\sum_a\sum_{b\neq a}m_b p_{ak}\Big[\Big(\partial_k-\frac{\partial}{\partial z_b{}^k}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_a{}^k}\Big)\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$+\Big(\partial_k-\frac{\partial}{\partial z_b{}^k}-\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial z_a{}^k}\Big)\frac{r_a-r_b}{2r_{ab}}+\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial z_a{}^k}\Big\{(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ab})+\frac{r_a-r_{ab}}{r_b}\Big\}\Big]$$

$$-\frac{3G^2}{4c^5}\sum_a m_a p_{ak}\Big\{\partial_j\Big(\frac{3\delta_{ik}-n_a{}^i n_a{}^k}{r_a{}^2}\Big)+\partial_i\Big(\frac{3\delta_{jk}-n_a{}^j n_a{}^k}{r_a{}^2}\Big)\Big\}$$

$$-\frac{2G^2}{c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}m_b\Big\{(p_{ai}\partial_j+p_{aj}\partial_i)\Big(\frac{1}{r_a r_b}+\frac{1}{r_a r_{ab}}-\frac{1}{r_b r_{ab}}\Big)$$

$$-\frac{1}{4}p_{ak}\frac{\partial}{\partial z_a{}^k}\Big(\partial_i\frac{\partial}{\partial z_a{}^j}+\partial_j\frac{\partial}{\partial z_a{}^i}\Big)\frac{r_a-r_{ab}}{r_b}$$

$$+p_{ak}\partial_j\Big(2\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^k}-\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^k\partial z_b{}^i}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_a{}^k}\Big)\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$+p_{ak}\partial_i\Big(2\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^j\partial z_b{}^k}-\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^k\partial z_b{}^j}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^j\partial z_a{}^k}\Big)\ln(r_a+r_b+r_{ab})\Big\}$$

(A7-11)

$$\pi^{ij\mathrm{TT}(3)}=0 \qquad \text{(A7-12)}$$

$$N_i=\frac{G}{c^3}\sum_a\Big\{-4\frac{p_{ai}}{r_a}+\frac{1}{2}\partial_i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)\Big\}$$

$$+\frac{G^2}{c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}m_b\Big[8p_{ai}\Big(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\Big)\frac{1}{r_{ab}}+\frac{2}{r_{ab}r_b}\Big\{p_{ai}-n_{ab}{}^i(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)\Big\}$$

$$+4p_{aj}\Big(4\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}-3\frac{\partial^2}{\partial z_b{}^i\partial z_a{}^j}\Big)\ln(r_a+r_b+r_{ab})-\frac{n_b{}^i(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)}{r_b{}^2}\Big]$$

$$+\partial_i\Big[-\frac{G^2}{4c^5}\sum_a m_a\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)}{r_a}+\frac{G^2}{c^5}\sum_a\sum_{b\neq a}m_b\Big[-\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)}{r_b}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)}{r_b}-\frac{7}{4}\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)}{r_{ab}}+\frac{7}{4}\frac{(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{p}_a)}{r_{ab}}+\frac{1}{4}\frac{(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ab})(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)}{r_{ab}}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_a)(r_a-r_b)}{r_{ab}{}^2}-\frac{1}{2}p_{aj}\Big(5\frac{\partial}{\partial z_a{}^j}-8\frac{\partial}{\partial z_b{}^j}\Big)\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$+\frac{1}{12}p_{aj}\frac{\partial^3}{\partial z_b{}^k\partial z_a{}^k\partial z_a{}^j}\Big\{(r_a{}^2-r_b{}^2+r_{ab}{}^2)\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$+r_b r_{ab}-r_a r_{ab}+r_a r_b\Big\}\Big]\Big] \qquad \text{(A7-13)}$$

$$N_0=1-\frac{G}{c^2}\sum_a\frac{m_a}{r_a}+\frac{G^2}{2c^4}\sum_a\sum_b\frac{m_a m_b}{r_a r_b}+\frac{G^2}{c^4}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}$$

$$-\frac{3G}{2c^4}\sum_a\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a r_a}-\frac{G^3}{4c^6}\sum_a\sum_b\sum_c\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_b r_c}-\frac{3G^3}{4c^6}\sum_a\sum_b\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_b r_{bc}}$$

$$-\frac{3G^3}{4c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq a}\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{ab} r_{ac}}-\frac{G^3}{4c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\sum_{c\neq b}\frac{m_a m_b m_c}{r_a r_{ab} r_{bc}}$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}}\Big\{5\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+\frac{\boldsymbol{p}_b{}^2}{m_b{}^2}-8\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\Big\}$$

$$+\frac{G^2}{8c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a r_b}\Big\{8\frac{\boldsymbol{p}_a{}^2}{m_a{}^2}+17\frac{(\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}+\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}$$

$$+14\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}\Big\}$$

$$+\frac{2G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_a{}^2}\frac{(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{p}_b)-(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{p}_b)}{m_a m_b}$$

$$+\frac{G^2}{c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}p_{ai}p_{bj}\Big(5\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j}-8\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial z_b{}^i}+4\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial z_b{}^j}\Big)\ln(r_a+r_b+r_{ab})$$

$$+\frac{7G^2}{12c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}p_{ak}p_{bj}\frac{\partial^4}{\partial z_a{}^k\partial z_a{}^i\partial z_b{}^j\partial z_b{}^i}\Big\{r_a r_b+r_{ab}{}^2\ln(r_a+r_b+r_{ab})\Big\}$$

$$+\frac{G^2}{4c^6}\sum_a\frac{m_a{}^2}{r_a{}^2}\frac{22\boldsymbol{p}_a{}^2-9(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{p}_a)^2}{m_a{}^2}+\frac{5G}{8c^6}\sum_a\frac{1}{r_a}\frac{(\boldsymbol{p}_a{}^2)^2}{m_a{}^3}$$

$$-\frac{1}{2}g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}-\frac{1}{2}g_{00}^{\mathrm{TT}(p)} \qquad \text{(A7-14)}$$

となる．(A7-14) における $g_{00}^{\mathrm{TT}(p)}$ は(A7-8)の $g_{00}^{\mathrm{TT}(v)}$ において $\boldsymbol{v}_a=\boldsymbol{p}_a/m_a$，$\boldsymbol{v}_b=\boldsymbol{p}_b/m_b$ と置き換えたものである．

$\boldsymbol{p}_a$ と $\boldsymbol{v}_a$ の間の関係式

$$\boldsymbol{p}_a=m_a\boldsymbol{v}_a+\frac{1}{2c^2}m_a\boldsymbol{v}_a{}^2\boldsymbol{v}_a+\frac{G}{2c^2}\sum_{b\neq a}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\{6\boldsymbol{v}_a-7\boldsymbol{v}_b-\boldsymbol{n}_{ab}(\boldsymbol{n}_{ab}\cdot\boldsymbol{v}_b)\}+O(c^{-4})$$

(A7-15)

によって，解（A7-9）～（A7-14）は解（A7-2）～（A7-8）に書き直される．

§A-8　U^{TT} の計算

重力場の TT-部から生じる静的ポテンシャル U^{TT}（5-135）の積分は 2 体，3 体，4 体ポテンシャルを含む．この中の 4 体ポテンシャルの積分はまだ求められていないが，2 体，3 体の結果は（5-156），（5-157）で与えられる．この計算を説明しよう．

2 体系の場合，（5-135）は

$$U^{\mathrm{TT}}(1,2)=\frac{Gm_1m_2}{2\pi}\int d^3x f_{ij}^{\mathrm{TT}}(1,2)\partial_i\frac{1}{r_1}\cdot\partial_j\frac{1}{r_2} \tag{A8-1}$$

となる．（5-73）から得られる 2 体系の $f_{ij}^{\mathrm{TT}}(1,2)$ の表示によって，$U^{\mathrm{TT}}(1,2)$ を次の 3 つの型の積分に分解する：

$$U^{\mathrm{TT}}(1,2)=I_1+I_2-I_3 \tag{A8-2}$$

$$\begin{aligned} I_1&=\frac{G^3m_1{}^2m_2{}^2}{2\pi c^4}\int d^3x\left(\partial_i\frac{1}{r_1}\right)\left(\partial_j\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_1{}^i\partial z_2{}^j}\ln(r_1+r_2+r)\\ &=\frac{G^3m_1{}^2m_2{}^2}{4\pi c^4}\int d^3x\,\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2)}{r^2r_1{}^2r_2{}^2}\\ &=\frac{G^3m_1{}^2m_2{}^2}{2c^4r^3}(J_{30}+J_{03}-J_{21}-J_{12}-r^2J_{32}-r^2J_{23}) \end{aligned} \tag{A8-3}$$

$$\begin{aligned} I_2&=\frac{G^3m_1{}^2m_2{}^2}{2\pi c^4}\int d^3x\left(\partial_i\frac{1}{r_1}\right)\left(\partial_j\frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^i\partial z_1{}^j}\ln(r_1+r_2+r)\\ &=\frac{G^3m_1{}^2m_2{}^2}{2c^4r^3}\int d^3x\Big\{(J_{30}+J_{03}-J_{21}-J_{12})-r^2(J_{41}+J_{14})\\ &\qquad+r^3(J_{42}+J_{24}-2J_{33})+r^4(J_{43}+J_{34})-r^5J_{44}\Big\} \end{aligned} \tag{A8-4}$$

$$\begin{aligned} I_3&=\frac{G^3m_1{}^2m_2{}^2}{16\pi c^4}\int d^3x\left(\partial_i\frac{1}{r_1}\right)\left(\partial_j\frac{1}{r_2}\right)\Bigg[2\delta_{ij}\Big\{\frac{1}{r_1r_2}-\frac{1}{rr_1}-\frac{1}{rr_2}\\ &\quad+\frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2)}{r^2}\Big\}+\partial_i\partial_j\Big\{2\ln(r_1+r_2+r)-\frac{r_1+r_2}{r}+\frac{r_1{}^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1)-r_2{}^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_2)}{2r^2}\Big\}\\ &\quad-4\frac{n^i(n_1{}^j-n_2{}^j)+n^j(n_1{}^i-n_2{}^i)}{r^2}\Bigg] \end{aligned}$$

$$= \frac{G^3 m_1{}^2 m_2{}^2}{32c^4 r^3}\int d^3x \Big\{17(J_{30}+J_{03})-14(J_{21}+J_{12})-3(J_{4,-1}+J_{-1,4})$$
$$-2r^2(J_{41}+J_{14})-22r^2(J_{32}+J_{23})+4r^3(J_{42}+J_{24}-2J_{33})$$
$$+13r^4(J_{43}+J_{34})-12r^5 J_{44}\Big\}. \qquad \text{(A8-5)}$$

ここで，J_{mn} は

$$J_{mn}=\frac{1}{4\pi}\int d^3x \frac{1}{r_1{}^m r_2{}^n}$$

で定義される積分である．

J_{mn} の各積分は発散するが，上記の I_1，I_2，I_3 においては発散する不定項はすべて打ち消し合い，積分の結果は有限確定値となる．この事を具体的に示そう．J_{mn} において変数を $\boldsymbol{x}\longrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}_2$ と変換すると

$$J_{mn}=\frac{1}{4\pi}\int d^3x \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}|^m|\boldsymbol{x}|^n}$$
$$=\frac{1}{2r}\int_0^\infty dx \frac{1}{x^{n-1}}\times\begin{cases}\dfrac{1}{m-2}\left[\dfrac{1}{|x-r|^{m-2}}-\dfrac{1}{(x+r)^{m-2}}\right], & m\neq 2\\ [\log(x+r)-\log|x-r|], & m=2\end{cases}$$

となる．この右辺の被積分関数は $x=0$ および $x=r$ に特異点を有するので，積分は

$$\int_0^\infty dx f(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \varepsilon'\to 0+}}\int_\varepsilon^{r-\varepsilon'} dx f(x)+\lim_{\substack{\varepsilon'\to 0+\\ L\to\infty}}\int_{r+\varepsilon'}^{L} dx f(x)$$

によって計算され，一般に ε，ε'，L についての発散項を生じる．それら発散項も含め，各 J_{mn} の結果は次のようになる：

$$J_{30}=-1+\ln\frac{\sqrt{L^2-r^2}}{\varepsilon'}, \qquad J_{03}=\ln\frac{L}{\varepsilon}$$

$$J_{21}=1+\ln\frac{\sqrt{L^2-r^2}}{r}, \qquad J_{12}=1+\ln\frac{L}{r}$$

$$J_{4,-1}=-\frac{1}{2}+\frac{r}{2\varepsilon'}+\ln\frac{\sqrt{L^2-r^2}}{r}, \qquad J_{-1,4}=-\frac{1}{2}+\frac{r}{\varepsilon}+\ln\frac{L}{r}$$

$$J_{41}=-\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{2r\varepsilon'}, \qquad J_{14}=-\frac{1}{2r^2}+\frac{1}{r\varepsilon}$$

$$J_{32}=\frac{1}{r^2}\ln\frac{r}{\varepsilon'} \qquad , \qquad J_{23}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\ln\frac{r}{\varepsilon}$$

$$J_{42}=\frac{1}{2r^2\varepsilon'} \qquad , \qquad J_{24}=\frac{1}{r^2\varepsilon}$$

$$J_{43}=-\frac{1}{2r^4}+\frac{1}{r^4}\ln\frac{r}{\varepsilon}+\frac{1}{2r^3\varepsilon'} \qquad , \qquad J_{34}=-\frac{3}{2r^4}+\frac{1}{r^4}\ln\frac{r}{\varepsilon'}+\frac{1}{r^3\varepsilon}$$

$$J_{33}=-\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\ln\frac{r}{\varepsilon}+\frac{1}{r^3}\ln\frac{r}{\varepsilon'} \qquad , \qquad J_{44}=\frac{1}{r^4\varepsilon}+\frac{1}{2r^4\varepsilon'}.$$

これによって，I_1，I_2，I_3を計算すると，ε，ε'，Lに伴う不定項はすべて打ち消し合い

$$I_1=-\frac{2G^3{m_1}^2{m_2}^2}{c^4r^3},\ I_2=-\frac{G^3{m_1}^2{m_2}^2}{c^4r^3},\ I_3=-\frac{5G^3{m_1}^2{m_2}^2}{2c^4r^3} \qquad \text{(A8-6)}$$

となる．したがって

$$U^{\mathrm{TT}}(1,2)=-\frac{G^3{m_1}^2{m_2}^2}{2c^4r^3} \qquad \text{(A8-7)}$$

を得る．

もう１つの計算方法として，(A7-5) で与えられる $h_{ij}^{\mathrm{TT}(s)}$ の g_{00} への寄与 $g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}$ (A7-7) を利用する．$g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}$ の２体部分は

$$g^{\mathrm{TT}(s)}_{00(2)}(\boldsymbol{x})=\frac{2G^3}{c^6\pi}\sum_a\sum_{b\neq a}{m_a}^2m_b\int d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left(\frac{\partial^2}{\partial {z_a}^i\partial {z_a}^j}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_a|}\right)$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial {z_a}^i\partial {z_b}^j}+\frac{\partial^2}{\partial {z_b}^i\partial {z_a}^j}\right)\ln(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_a|+|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{z}_b|+|\boldsymbol{z}_a-\boldsymbol{z}_b|)\right\}^{\mathrm{TT}}$$
$$\text{(A8-8)}$$

であり，(A7-5) を代入し§A-6の積分公式を利用すると (A7-7) にあるように

$$g^{\mathrm{TT}(s)}_{00(2)}(\boldsymbol{x})=\frac{G^3}{4c^6}\sum_a\sum_{b\neq a}{m_a}^2m_b\left[\frac{2}{r_ar_br_{ab}}-\frac{3}{{r_a}^2r_b}-\frac{10}{r_a{r_{ab}}^2}-\frac{12}{{r_a}^2r_{ab}}\right.$$
$$-\frac{3}{r_b{r_{ab}}^2}+\frac{2r_{ab}}{{r_a}^3r_b}-\frac{2{r_b}^2}{{r_a}^3{r_{ab}}^2}+\frac{2(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)}{{r_a}^2r_{ab}}-\frac{14(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{{r_a}^2r_{ab}}$$
$$-\frac{18(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{r_a{r_{ab}}^2}+\frac{2(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ab})}{r_a{r_{ab}}^2}+\frac{r_b}{{r_a}^2{r_{ab}}^2}\{15+17(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_{ab})$$

$$+(\boldsymbol{n}_a\cdot\boldsymbol{n}_b)(\boldsymbol{n}_b\cdot\boldsymbol{n}_{ab})\}-\frac{2}{r_{ab}{}^3}\left(1-\frac{r_a}{r_b}\right)\Bigg] \tag{A8-9}$$

となる．特に物体1，2について（A8-8）は

$$\begin{aligned}
&g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}(\boldsymbol{x}:z_1,\ z_2)\\
&=\frac{2G^3m_1{}^2m_2}{c^6\pi}\int d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1{}^i\partial z_1{}^j}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-z_1|}\right)\\
&\quad\times\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1{}^i\partial z_2{}^j}+\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^i\partial z_1{}^j}\right)\ln(|\boldsymbol{x}'-z_1|+|\boldsymbol{x}'-z_2|+r)\right\}^{\mathrm{TT}}\\
&\quad+\frac{2G^3m_1m_2{}^2}{c^6\pi}\int d^3x'\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^i\partial z_2{}^j}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-z_2|}\right)\\
&\quad\times\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1{}^i\partial z_2{}^j}+\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^i\partial z_1{}^j}\right)\ln(|\boldsymbol{x}'-z_1|+|\boldsymbol{x}'-z_2|+r)\right\}^{\mathrm{TT}}
\end{aligned} \tag{A8-10}$$

である．この表示から

$$\begin{aligned}
g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}(\boldsymbol{x}=z_1:z_1,\ z_2)&=-\frac{2G^3m_1m_2{}^2}{c^6\pi}\\
&\quad\times\int d^3x\left(\partial_i\frac{1}{r_1}\right)\left(\partial_j\frac{1}{r_2}\right)\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1{}^i\partial z_2{}^j}+\frac{\partial^2}{\partial z_2{}^i\partial z_1{}^j}\right)\ln(r_1+r_2+r)\right\}^{\mathrm{TT}}\\
&=-\frac{4}{m_1c^2}U^{\mathrm{TT}}(1,2)
\end{aligned} \tag{A8-11}$$

同様に

$$g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}(\boldsymbol{x}=z_2:z_1,z_2)=-\frac{4}{m_2c^2}U^{\mathrm{TT}}(1,2) \tag{A8-12}$$

が導かれる．（A8-11）および（A8-12）の左辺は（A8-9）より Infeld の δ 関数を用いて直接計算される．（Infeld の δ 関数を用いるのは1種の regularization である．）結果は

$$\begin{aligned}
g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}(\boldsymbol{x}=z_2:z_1,z_2)&=\int d^3x\delta(\boldsymbol{x}-z_2)g_{00}^{\mathrm{TT}(s)}(\boldsymbol{x}:z_1,z_2)\\
&=\frac{2G^3m_1{}^2m_2}{c^6r^3}
\end{aligned} \tag{A8-13}$$

となる．（A8-12）と（A8-13）より再び（A8-7）が得られる．この2体の結果を一般化して

$$U^{\mathrm{TT}}{}_{(2)} = -\frac{G^3}{4c^4}\sum_a \sum_{b\neq a} \frac{m_a{}^2 m_b{}^2}{r_{ab}{}^3} \tag{A8-14}$$

を得る．

次に，U^{TT} に含まれる3体ポテンシャルの計算は直接積分を行うよりも上記の第2の方法を利用する方が簡単である．(5-135) の3体部分は

$$U^{\mathrm{TT}}{}_{(3)} = \frac{G^3}{2\pi c^4}\int d^3x \sum_a \sum_{b\neq a} \sum_{c\neq a,b} m_a{}^2 m_b m_c \left(\partial_i \frac{1}{r_c}\right)\left(\partial_j \frac{1}{r_a}\right)$$
$$\times\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial z_a{}^i \partial z_b{}^j} + \frac{\partial^2}{\partial z_b{}^i \partial z_a{}^j}\right)\ln(r_a + r_b + r_{ab})\right\}^{\mathrm{TT}} \tag{A8-15}$$

であり，一方 (A8-8) より $c \neq a, b$ に対して

$$-\frac{c^2}{4}\sum_{c\neq a,b} m_c g^{\mathrm{TT}(s)}_{00\,(2)}(\boldsymbol{x} = z_c) = U^{\mathrm{TT}}{}_{(3)} \tag{A8-16}$$

が導かれる．この式の左辺は (A8-9) より容易に計算され，結局

$$U^{\mathrm{TT}}{}_{(3)} = -\frac{G^3}{64c^4}\sum_a \sum_{b\neq a} \sum_{c\neq a,b} \frac{m_a{}^2 m_b m_c}{r_{ab}{}^3 r_{ac}{}^3 r_{bc}}\{18 r_{ab}{}^2 r_{ac}{}^2 - 24 r_{ab} r_{ac}{}^3 + 6 r_{ac}{}^4$$
$$+ 56 r_{ac}{}^3 r_{bc} - 24 r_{ab} r_{ac}{}^2 r_{bc} - 60 r_{ac}{}^2 r_{bc}{}^2 + 60 r_{ab} r_{ac} r_{bc}{}^2$$
$$- 72 r_{ac} r_{bc}{}^3 + 35 r_{bc}{}^4\} \tag{A8-17}$$

となる．

§ A-9　Gauss-Codazzi の埋め込み方程式と ADM 力学変数の幾何学的意味

はじめに，微分幾何学における部分空間の埋め込みに関する Gauss-Codazzi 方程式を導く．4次元 Riemann 空間（座標 x^μ，計量 ${}^4g_{\mu\nu}$ $(\mu = 0 \sim 3)$）に埋め込まれた3次元部分空間（座標 ξ^i $(i = 1 \sim 3)$）を考える．この部分空間に誘導される計量テンソルは

$$\gamma_{ij} = {}^4g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} = {}^4g_{\mu\nu} e^\mu{}_i e^\nu{}_j \tag{A9-1}$$

で定義される．ここで $e^\mu{}_i = \partial x^\mu / \partial \xi^i$ はこの部分空間上の各点における i 番目の座標線への接ベクトル（tangent vector）である．また，同じ点における法ベクトル（normal vector）を n^μ とすると，n^μ，$e^\mu{}_i$ は

$$n_\mu n^\mu = {}^4g_{\mu\nu} n^\nu n^\mu = -1 \tag{A9-2}$$

$$n_\mu e^\mu{}_i = {}^4g_{\mu\nu} n^\nu e^\mu{}_i = 0 \tag{A9-3}$$

を満足する．n^μ，$e^\mu{}_i$ をまとめて，$e^\mu{}_\alpha=\langle\!\langle n^\mu,\ e^\mu{}_i\rangle\!\rangle$，$\alpha=0,1,2,3$，と表示すると，(A9-1) ～ (A9-3) は

$$\gamma_{\alpha\beta}={}^4g_{\mu\nu}e^\mu{}_\alpha e^\nu{}_\beta,\qquad \gamma_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \gamma_{ij}\end{pmatrix}\tag{A9-4}$$

とまとめられる．$\gamma_{\alpha\beta}$ の逆行列を $\gamma^{\alpha\beta}$ とすると

$$\gamma^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & \gamma^{ij}\end{pmatrix};\ \gamma^{ij}\text{ は }\gamma_{ij}\text{ の逆行列}\tag{A9-5}$$

となる．したがって，

$$e_{\mu\alpha}={}^4g_{\mu\nu}e^\nu{}_\alpha=\langle\!\langle n_\mu,\ e_{\mu i}\rangle\!\rangle,\quad e^\alpha{}_\mu=\gamma^{\alpha\beta}e_{\mu\beta}=\langle\!\langle -n_\mu,\ e^i{}_\mu\rangle\!\rangle\tag{A9-6}$$

である．この $e^\mu{}_\alpha$，$e^\beta{}_\nu$ は次の直交性および完備性の条件を満たす：

$$e^\alpha{}_\mu e^\mu{}_\beta=\delta^\alpha{}_\beta,\qquad e^\alpha{}_\mu e^\nu{}_\alpha=\delta^\nu{}_\mu.\tag{A9-7}$$

これらの関係式により，(A9-4) より

$${}^4g^{\mu\nu}=\gamma^{\alpha\beta}e^\mu{}_\alpha e^\nu{}_\beta=\gamma^{ij}e^\mu{}_i e^\nu{}_j-n^\mu n^\nu\tag{A9-8}$$

が導かれる．

部分空間の affine 係数 $\Gamma_{ijk}=1/2(\gamma_{ij,k}+\gamma_{ki,j}-\gamma_{jk,i})$ を計算すると

$$\Gamma_{ijk}={}^4\Gamma_{\mu\nu\lambda}e^\mu{}_i e^\nu{}_j e^\lambda{}_k+{}^4g_{\mu\nu}e^\mu{}_i e^\nu{}_{jk},\quad e^\nu{}_{jk}=\frac{\partial^2x^\nu}{\partial\xi^j\partial\xi^k}\tag{A9-9}$$

となる．4 次元空間の任意のベクトルは n^μ，$e^\mu{}_i$ の 1 次結合で表わされるので

$$e^\mu{}_{ij}=A^k{}_{ij}e^\mu{}_k+B_{ij}n^\mu\tag{A9-10}$$

とおくと，この係数 A_{ijk}，B_{ij} は (A9-7)，(A9-9) により

$$A_{ijk}=\Gamma_{ijk}-{}^4\Gamma_{\mu\nu\lambda}e^\mu{}_i e^\nu{}_j e^\lambda{}_k\tag{A9-11}$$

$$B_{ij}=-K_{ij}+{}^4\Gamma_{\mu\nu\lambda}n^\mu e^\nu{}_i e^\lambda{}_j\tag{A9-12}$$

となる．ここで，K_{ij} は外的曲率 (extrinsic curvature) と呼ばれる量で，

$$K_{ij}=K_{ji}=-{}^4g_{\mu\nu}\nabla_\lambda n^\mu\cdot e^\nu{}_i e^\lambda{}_j\tag{A9-13}$$

で定義される．K_{ij} の幾何学的意味については後に具体例で説明する．同様に，

$$n^\mu{}_{,i}=C^j{}_i e^\mu{}_j+D_i n^\mu\tag{A9-14}$$

については

$$C_{ij}=-K_{ij}-{}^4\Gamma_{\mu\nu\lambda}e^\mu{}_i e^\nu{}_j n^\lambda\tag{A9-15}$$

$$D_i={}^4\Gamma_{\mu\nu\lambda}n^\mu n^\nu e^\lambda{}_i\tag{A9-16}$$

となる．

次に，もうワン・ステップ進め，$e^{\mu}{}_{ijk}=\dfrac{\partial}{\partial\xi^k}e^{\mu}{}_{ij}$，$n^{\mu}{}_{,ij}$ を n^{μ}，$e^{\mu}{}_i$ の1次結合に展開すると consistency の条件 $e^{\mu}{}_{ijk}=e^{\mu}{}_{ikj}$，$n^{\mu}{}_{,ij}=n^{\mu}{}_{,ji}$ から，次の Gauss-Codazzi 方程式が導かれる：

$$ {}^4R_{\mu\nu\lambda\rho}e^{\mu}{}_i e^{\nu}{}_j e^{\lambda}{}_k e^{\rho}{}_l = R_{ijkl}+K_{ik}K_{jl}-K_{il}K_{jk} \tag{A9-17}$$

$$ {}^4R_{\mu\nu\lambda\rho}n^{\mu}e^{\nu}{}_i e^{\lambda}{}_j e^{\rho}{}_k = -K_{ij|k}+K_{ik|j}. \tag{A9-18}$$

ただし，(A9-18) の右辺の "|" 記号は部分空間の計量についての共変微分を表わす．

§6-1 においては，4次元時空を時間を表わすパラメータ x^0 によって空間的超曲面 $\Sigma(x^0)$ にスライスする．このスライスされた各3次元超曲面は前述の部分空間であり，その座標 ξ^i として $\xi^i=x^i\ (i=1\sim3)$ を選ぶ．したがって，部分空間内の計量テンソル (A9-1) は

$$\gamma_{ij}={}^4g_{ij}=g_{ij}, \qquad e^{\mu}{}_i=\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^i}=\delta^{\mu}{}_i \tag{A9-19}$$

となる．このような(3+1)次元空間の記述による ADM の力学変数(6-6)，(6-7) によって，4次元時空の線素 ds は

$$\begin{aligned} ds^2 &= {}^4g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\ &= -(N_0dx^0)^2+g_{ij}(N^idx^0+dx^i)(N^jdx^0+dx^j) \end{aligned} \tag{A9-20}$$

と表わされる．この表示を図示すると図A-1のようになる．ごく近接した2つの空間的超曲面 $\Sigma(x^0)$ および $\Sigma(x^0+dx^0)$ 上の2点 $(x^0,\ x^i)$，$(x^0+dx^0,\ x^i+dx^i)$ 間の距離が (A9-20) で与えられる．

(A9-20) および図 A-1 より，$n_{\mu}dx^{\mu}=-N_0dx^0$ であり

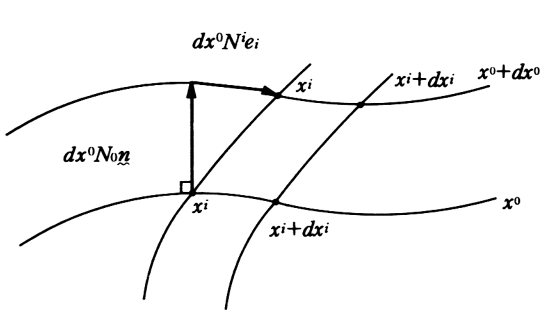


図 A-1

$$n_\mu = (-N_0, 0, 0, 0), \qquad n^\mu = \frac{1}{N_0}(1, -N^1, -N^2, -N^3) \tag{A9-21}$$

となる．(n^μ の向きを x^0 が増加する方向にとっているので，n_0 の符号は負となる．) また，$dx^\mu = (dx^0,\ 0, 0, 0)$ に対して $e^i{}_\mu dx^\mu = N^i dx^0$ となることから，

$$e^i{}_\mu = (N^i,\ e^i{}_a), \qquad e^\mu{}_i = (0, e^a{}_i) \tag{A9-22}$$

である．

N_0 および N^i は 2 つの超曲面 $\Sigma(x^0)$ と $\Sigma(x^0+dx^0)$ の間の関係を与える：$N_0 dx^0$ は超曲面 $\Sigma(x^0)$ 上から垂直な方向に固有時で測った $\Sigma(x^0+dx^0)$ までの間隔を表わし，$N^i dx^0$ は $\Sigma(x^0+dx^0)$ 上の座標系が $\Sigma(x^0)$ 上の座標系に対してどれだけ変位しているかを表わす．$N_0(x^0, \boldsymbol{x})$ は lapse 関数，$N^i(x^0, \boldsymbol{x})$ は shift 関数と名付けられている．

(A9-13) で定義される外的曲率は

$$\begin{aligned} K_{ij} &= -\nabla_j n_i = -n_{i,j} + {}^4\Gamma^\mu{}_{ij} n_\mu \\ &= \frac{1}{2N_0}(N_{i|j} + N_{j|i} - g_{ij,0}) \end{aligned} \tag{A9-23}$$

となり，4 次元 Christoffel シンボル ${}^4\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ のうち ${}^4\Gamma^l{}_{ij}$ および ${}^4\Gamma^0{}_{ij}$ を 3 次元の量で書き表わすと

$${}^4\Gamma^l{}_{ij} = \Gamma^l{}_{ij} + \frac{N^l}{N_0} K_{ij}, \qquad {}^4\Gamma^0{}_{ij} = \Gamma^0{}_{ij} = -\frac{1}{N_0} K_{ij} \tag{A9-24}$$

となる．K_{ij} の幾何学的意味は図 A-2 によって理解される．超曲面 $\Sigma(x^0)$ 上の点 $\boldsymbol{x}$ における単位の法ベクトル $n^\mu(x^0, \boldsymbol{x})$ を Σ 上で Σ に沿って点 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ まで平行移

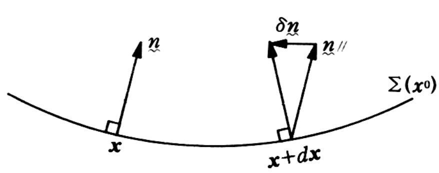


図 A-2

動したものを $n^{\mu}(x^0, \boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})_{/\!/}$ とする．点 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ における法ベクトル $n^{\mu}(x^0, \boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ と $n^{\mu}(x^0, \boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})_{/\!/}$ との差を δn^{μ} とすると 4 次元共変微分の定義によって

$$\begin{aligned}\delta n_i &= \nabla_j n_i dx^j \\ &= -K_{ij}dx^j \end{aligned} \tag{A9-25}$$

である．K_{ij} が正定値であれば $\delta n_i < 0$ となり Σ の面は上に開く．このように，外的曲率 K_{ij} は超曲面 Σ が 4 次元空間の中に埋め込まれている様子を表わす量であり，超曲面内の計量 g_{ij} から導かれる内的曲率（intrinsic curvature）R とは異なる．また，K_{ij} は次の恒等式を満足する．

$$\nabla_{\mu} n^{\mu} = -K^i{}_i = -K \tag{A9-26}$$

$$\nabla_{\mu} n^{\nu} \cdot \nabla_{\nu} n^{\mu} = K_{ij}K^{ij}. \tag{A9-27}$$

ADM による時空の (3+1) 分解においては，Gauss-Codazzi 方程式（A9-17），（A9-18）は次のようになる：

$${}^4R_{ijkl} = R_{ijkl} + K_{ik}K_{jl} - K_{il}K_{jk} \tag{A9-28}$$

$${}^4R_{\mu ijk} n^{\mu} = -K_{ij|k} + K_{ik|j}. \tag{A9-29}$$

作用関数（6-1）を (3+1) 分解するために ${}^4R = -{}^4R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$ を（A9-8）によって変形すると ($\gamma^{ij} = g^{ij}$)

$${}^4R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = g^{ik}g^{jl}\,{}^4R_{klij} - 2g^{ij}\,{}^4R_{j\alpha i\beta}n^{\alpha}n^{\beta} \tag{A9-30}$$

となる．右辺第 1 項は Gauss-Codazzi の方程式（A9-28）によって 3 次元空間の量に書き直されるので，4 次元の Ricci スカラーは

$${}^4R = R - K^2 + K_{ij}K^{ij} + 2g^{ij}\,{}^4R_{j\alpha i\beta}n^{\alpha}n^{\beta} \tag{A9-31}$$

となる．この右辺の第 4 項を計算するために，任意のベクトルに対する 2 回共変微分の式（3-48）を n_{α} に適用する：

$$\nabla_{\gamma}\nabla_{\beta} n_{\alpha} - \nabla_{\beta}\nabla_{\gamma} n_{\alpha} = {}^4R^{\delta}{}_{\alpha\beta\gamma} n_{\delta}. \tag{A9-32}$$

この式の両辺に ${}^4g^{\alpha\gamma}n^{\beta}$ を掛けて縮約し，（A9-26），（A9-27）を用いると

$$\begin{aligned} g^{ij}\,{}^4R_{j\alpha i\beta}n^{\alpha}n^{\beta} &= {}^4R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}n^{\alpha}n^{\beta} \\ &= K^2 - K_{ij}K^{ij} + \nabla_{\alpha}(n^{\beta}\nabla_{\beta}n^{\alpha} - n^{\alpha}\nabla_{\beta}n^{\beta}) \end{aligned} \tag{A9-33}$$

となる．以上をまとめると，4 次元の曲率スカラー密度は

$$\sqrt{-{}^4g}\,{}^4R = N_0\sqrt{g}\,R + N_0\sqrt{g}\,(K^2 - K_{ij}K^{ij}) + V^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{A9-34}$$

$$V^{\alpha}{}_{,\alpha} = 2(\sqrt{g}\,K)_{,0} - 2[\sqrt{g}\,(KN^i - g^{ij}N_{0,j})]_{,i} \tag{A9-35}$$

となる．g_{ij} の正準共役運動量 π^{ij} と K_{ij} の関係は（6-9）および（A9-24）より

$$\pi^{ij} = -\sqrt{g}\,(K^{ij} - Kg^{ij}) \tag{A9-36}$$

であり，(A9-34) を π^{ij} を用いて表示することにより作用関数の (3+1) 表現 (6-10) が導かれる．

参考文献

序文に書いたように，本書では重力場の古典論と量子論との接点を探ることに主眼をおいた．一般相対性理論についても主要な部分は述べたつもりであるが，本書の目的のため，細部については割愛しなければならなかった部分がある．これを補う意味で，次に一般相対性理論に関する一般的な性格をもつ教科書をあげておく．

●日本語の代表的なものとしては

（1） 内山龍雄：一般相対性理論（裳華房，1978）

（2） 佐藤文隆：相対論と宇宙論（サイエンス社，1981）

（3） 平川浩正：相対論（共立出版，1971）

（4） 藤井保憲：時空と重力（産業図書，1979）

（5） 成相秀一，富田憲二：一般相対論的宇宙論（裳華房，1988）

等がある．(1)は一般相対性理論全般にわたって，ぼかさず，詳細，簡明に書かれている．(2)，(3)はコンパクトにまとめられ，相対性理論の概要を知ることができる．(4)は特殊相対論から一般相対論への詳しい入門書．(5)は一般相対性理論による宇宙論全般にわたって書かれている．

●外国人によるもので，よく知られているのは

（6） W.Pauli：Relativitätstheorie（Teubner，1921）［内山龍雄訳：相対性理論（講談社，1974)］

（7） H.Weyl：Raum,Zeit,Materie（Springer-Verlag，1923）［内山龍雄訳：空間・時間・物質（講談社，1973)］

（8） E.Schrödinger：Space-time Structure（Cambridge Univ.Press，1950）［湯川秀樹監修：シュレーディンガー選集２（共立出版，1974)］

（9） C.Møller：The Theory of Relativity（Oxford Univ. Press，1952）［永田恒夫，伊藤大介訳：相対性理論（みすず書房，1959)］

(10) L.Landau and E.Lifshitz：The Classical Theory of Fields, 4th rev. Englihs ed.（Pergamon Press，1975）［広重徹，恒藤敏彦訳：場の古典論（東

京図書，1964)]
(11) V.Fock：The Theory of Space, Time and Gravitation (Pergamon Press, 1959)
(12) R.Adler, M.Bazin and M.Schiffer：Introduction to General Relativity (McGraw-Hill, 1965)
(13) S.Weinberg：Gravitation and Cosmology：Principles and Applications of the General Theory of Relativity (John Wiley & Sons, 1972)
(14) R.M.Wald：General Relativity (Univ. of Chicago Press, 1984)
(15) C.W.Misner, K.S.Thorne and J.A.Wheeler：Gravitation (W.H.Freeman and Company, 1973)

等である．最初の(6)と(7)は戦前の代表的教科書である．(8)は統一場理論入門のために書かれたものである．(9)は戦後初期の典型的な教科書である．(10)の第4版は，問題の形で多くの事柄が盛られている．(11)は個性のあるもので，ポスト-Newton近似にも触れている．(12)は広い範囲にわたって基本的なことが詳しく書かれた教科書．(13)は宇宙論も含んだ教科書である．(14)は時空の特異点やブラック・ホールを対象にした数学的な書である．(15)は重力全般にわたる事典的なものとして広く用いられている．

以上のほか国内，国外で出版されている良書がたくさんある．たとえば，Diracの相対論についての講義を書にしたもの等がある．著者の周囲にある書物の内から，入手しやすいものと思われるものを挙げたので，書き落としがあるかもわからないがお許し願いたい．

第1章の文献

[1] A.Pais：'Subtle is the Lord…' [西島和彦監訳：神は老獪にして――(産業図書，1987)]
[2] 木村，菅野：微分形式による解析力学 (マグロウヒル出版，1988)
[3] たとえば，高橋康：量子場を学ぶための場の解析力学入門 (講談社，1982)

第2章の文献

[1] モーガン原稿，第1章文献[1]の和訳本，232頁参照．
[2] アインシュタイン選集2，内山龍雄訳 (共立出版，1970)

［3］ 同上論文選集 2

［4］ 同上論文選集 2

第 4 章の文献

［1］ 参考文献(10)，p.168～169；p.342

［2］ 参考文献(15)，p.465

第 5 章の文献

［1］ T.Ohta, H.Okamura, T.Kimura and K.Hiida, Prog. Theor. Phys.**50**（1973）492；**51**（1974）1220

［2］ L.Infeld and J.Plebański, Motion and Relativity, Pergamon Press（1960）Appendix 1

［3］ 同上 Chap. IV

［4］ T.Ohta and T.Kimura, Prog. Theor. Phys. **79**（1988）819

［5］ G.Schäfer, Phys. Lett. **100 A**（1984）128

［6］ 第 6 章の文献［1］

［7］ T.Ohta, T.Kimura and K.Hiida, Nuovo Cim.**27 B**（1975）103 Appendix A

［8］ 同上 Appendix C（C.3）

［9］ B.M.Barker and R.F.O'Connell, J.Math. Phys.**28**（1987）661

［10］ 参考文献（10)，p.343

第 6 章の文献

［1］ R.Arnowitt, S.Deser and C.W.Misner, Gravitation, An Introduction to Current Research ed. L.Witten（John Wiley and Sons, 1962）Chap.7 ADM の一連の論文のリストはこの文献の References を参照されたい.

［2］ T.Ohta, H.Okamura, T.Kimura and K.Hiida, Prog. Theor. Phys. **51**（1974）1598

［3］ T.Ohta and T.Kimura, Prog. Theor. Phys. **76**（1986）329

［4］ G.Schäfer, Ann. of Phys.**161**（1985）81

［5］ 参考文献（10）p.357

［6］ B.S.DeWitt, Phys. Rev. **160**（1967）1113

第7章の文献

[1] H.P.Robertson, Ann. Math. **39** (1938) 101

[2] T.Ohta and T.Kimura, Phys. Lett. **A129** (1988) 436 ; Prog. Theor. Phys. **81** (1989) 662

[3] T. Ohta and T.Kimura, Prog. Theor. Phys. **81** (1989) 679

[4] T.Damour and G.Schäfer, Nuovo Cim. **101B** (1988) 127

[5] Y.Saito, R.Sugano, T.Ohta and T.Kimura, J.Math. Phys.**30** (1989) 1122

[6] M.Ostrogradski : E.T.Whittaker, Analytical Dynamics (Cambridge Univ. Press, 1937) 4th edition, p.265 を参照

[7] 第1章文献 [2]

第8章の文献

[1] C.Becchi, A.Rouet and R.Stora, Phys. Lett. **52B** (1974) 344 ; Ann. of Phys. **98** (1976) 287 ; I.V.Tyutin, Lebedev preprint, FIAN No.39 (1975)未出版

[2] T.Kugo and I.Ojima, Suppl. Prog.Theor. Phys. **66** (1979) 1

[3] N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **59** (1978) 972 ; **60** (1978) 1190 ; Phys. Rev Lett. **43** (1979) 91 ; その後の Prog. Theor. Phys. 掲載の一連の論文

[4] K.Hiida and H.Okamura, Prog. Theor. Phys. **47** (1972) 1473

[5] H.Okamura, T.Ohta, T.Kimura and K.Hiida, Prog. Theor. Phys. **50** (1973) 2066

[6] K.Yokoya, A.Shimizu, H.Kato and K.Hiida, Phys. Rev. **D16** (1977) 2655

第9章の文献

[1] S.L.Adler, Phys. Rev. **177** (1969) 2426

[2] T.Kimura, Prog. Theor. Phys. **42** (1969) 1191

[3] K.Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1195 ; Phys. Rev. **D21** (1980) 2843

[4] L. Alvarez-Gaumé and E.Witten, Nucl. Phys. **B234** (1983) 269

[5] J.Wess and B.Zumino, Phys. Lett. **37B** (1971) 95

[6] W.A.Bardeen and B.Zumino, Nucl. Phys. **B244** (1984) 421

第10章の文献

[1] T.Goto, Prog. Theor. Phys. **46** (1971) 1560；Y.Nambu, Lectures at the Copenhagen Symposium (1970) 未出版

[2] A.M.Polyakov, Phys. Lett. **103B** (1981) 207

[3] M.Kato and K.Ogawa, Nucl. Phys. **B212** (1983) 443

[4] M.Kaku and K.Kikkawa, Phys,Rev. **D10** (1974) 1110；1823

[5] W. Siegel, Phys. Lett. **151B** (1985) 396

[6] H.Hata, K. Itoh, T.Kugo, H.Kunitomo and K.Ogawa, Phys. Rev. **D 34** (1986) 2360；**D35** (1987) 1318

[7] E.Witten, Nucl. Phys. **B268** (1986) 253；**B276** (1987) 291

[8] T.Yoneya, Prog. Theor. Phys. **51** (1974) 1907

[9] 藤井保憲：超重力理論入門（マグロウヒル出版, 1987）

[10] M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten：Superstring Theory, Vols 1 and 2 (Cambridge Univ. Press, 1987)

[11 a, b] M.B.Green and J.H.Schwarz, Phys. Lett. **149B** (1984) 117；Nucl. Phys. **B255** (1985) 93

[12] たとえば, 菅本晶夫：数理科学(1986)11月号, p 57

索　　引

あ　行

か　行

さ 行

著 者 略 歴

木村(きむら) 利栄(としえい)（理学博士）

1948年　京都大学理学部物理学科卒業
1948年　広島大学理論物理学研究所助手
　　　　以後，講師，助教授を経て
1973年　同　教授，現在に至る

専門分野：重力理論，場の理論
主要著書：『微分形式による解析力学』
　　　　　（共著：マグロウヒル出版）

太田(おおた) 忠之(ただゆき)（理学博士）

1964年　東北大学理学部物理学科卒業
1969年　同大学院理学研究科博士課程修了
　　　　日本学術振興会奨励研究員，成蹊大学工学部助手を経て
1975年　宮城教育大学助教授
1988年　同　教授

訳書（共訳）
パイス，神は老獪にして（アインシュタインの人と学問）
（産業図書）

古典および量子重力理論

©1989 木村利栄/太田忠之

1989年10月25日　初版第1刷発行

〔無検印制〕　著 者　木 村 利 栄
　　　　　　　　　　太 田 忠 之
　　　　　　発行者　崎 山 克 彦

発行所　マグロウヒル出版株式会社
東京都中央区銀座4-14-11（七十七ビル）
〒104　電話 03-542-8821

無断転載複製を禁ず

(株)耕文社印刷所　印刷・製本

（定価はカバーに表示してあります）